Calcul vectoriel

***Exercice 1** On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les trois vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\\ \vec{v} &= 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}\\ \vec{w} &= 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}.\end{aligned}$$

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

***Exercice 2** L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1/2)\vec{i} + (\sqrt{3}/2)\vec{k}\\ \vec{v} &= (\sqrt{3}/2)\vec{i} - (1/2)\vec{k}\\ \vec{w} &= -\vec{j}.\end{aligned}$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

Exercice 3 L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Etablir l'identité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : effectuer un calcul composante par composante.

***Exercice 4** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{BM} = 0$. (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Représenter ces deux ensembles sur un dessin.
4. Considérer le mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$

***Exercice 5** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

***Exercice 6** Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.

1. Etablir l'identité
$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 + \|\vec{U}-\vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2).$$

2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que
$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2.$$

***Exercice 7** Trouver l'angle θ entre les vecteurs joignant (dans un repère orthonormé) l'origine aux points $P_1 \equiv (1,2,3)$ et $P_2 \equiv (2,-3,-1)$.

***Exercice 8** On considère dans un repère orthonormé les trois points $P_1 \equiv (1,1,1)$, $P_2 \equiv (1,2,3)$ et $P_3 \equiv (0,0,2)$. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{OP_1}$, $\vec{v} = \vec{OP_2}$ et $\vec{w} = \vec{OP_3}$.

***Exercice 9** Ecrire les équations de la droite passant par $P_0 \equiv (1,2,3)$ et parallèle à $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Soient $A \equiv (3,1,-1)$ et $B \equiv (1/2, 9/4, 4)$. Lequel de ces points est situé sur la droite ?

***Exercice 10** Soient P_0 et P_1 deux points de l'espace $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'un point P appartient au segment P_0P_1 si et seulement si
$$\text{il existe } t \in [0,1] \text{ tel que :} \qquad \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}.$$
Trouver une expression pour l'ensemble des points appartenant au segment de $\mathbb{R}^2$ entre $P_0 \equiv (1,2)$ et $P_1 \equiv (3,5)$.

RAPPEL On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout $P_0 \in E$ et $P_1 \in E$, le segment entre P_0 et P_1 est contenu dans E.

Exercice 11 Préciser si les ensembles de définition des fonctions suivantes sont des ensembles convexes :
$$f(x,y) = \sqrt{y-x^2}, \qquad f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y+1}}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{y-x}\right)\right).$$

Exercice 12 Ecrire l'équation du plan tangent au point $H \equiv (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ à la sphère centrée en $C \equiv (1,0,0)$ et de rayon 2.

***Exercice 13** Soit $P_0 \equiv (1,2,3)$. Ecrire l'équation du plan

1. passant par P_0 et orthogonal à $\vec{u} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$.
2. passant par P_0 et parallèle à $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.
3. passant par P_0, $P_1 \equiv (3,-2,1)$ et $P_2 \equiv (5,0,-4)$.

Exercice 14 Montrer que le module de la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ est égale à $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|}$. Trouver la plus courte distance d séparant le point $P_0 \equiv (1,2,3)$ et le plan d'équation $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

Fonctions de plusieurs variables

1 Lignes de niveau

***Exercice 15** Soit $k \in \mathbb{R}$; et f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f;$ tel que $f(x, y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f. Trouver les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$.

Exercice 16 Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}, \qquad k = 0, -1$$
$$f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy}, \qquad k = 1, 2$$
$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2y^2}, \qquad k = 2$$
$$f(x, y) = x - y - |x - y|, \qquad k \in \mathbb{R},$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$ et $k > 0$ et $k < 0$.

2 Ensembles ouverts. Ensembles fermés. Voisinages

RAPPEL

1. Soit C un point de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$. La *boule centrée en* C *et de rayon* r, notée $B_r(C)$, est l'ensemble des points P tels que $||\vec{CP}|| < r$.

2. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est *ouvert* si, pour tout $C \in E$, il existe $r > 0$ tel que $B_r(C)$ soit contenue dans E.
   On dit que E est *fermé* si son complémentaire E^c est un ensemble ouvert.

Exercice 17 Etablir si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés (ou bien ni ouverts ni fermés).

$$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ 1 < x < 3\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \ ; \ 2 \leq x \leq 5\}$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z > 2\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < |x| < |y| < 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = x^2\}, \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq y < e^x\}.$$

Exercice 18 Soit P un point de $\mathbb{R}^n$. En général on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de* P si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant P.

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x,y) = \sqrt{x+y}, \qquad f(x,y) = \ln(\cos(x^2+y^2)).$$

3 Limites de fonctions de deux variables

***Exercice 19** Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2+y^2}$. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

***Exercice 20** Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+2y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 21 Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 22 Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites:

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes:

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0,0)$

- Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe.
- Une de ces trois limites peut exister sans les deux autres existent.
- (B) et (C) peuvent exister sans être égales.
- Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

***Exercice 23** Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

***Exercice 24** Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^{1/3} y^2}{x^2+y^2+|x-y|},$$

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y$$

3.1 Utilisation des coordonnées polaires

RAPPEL Soit $g\colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$. Supposons que

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = \ell \qquad \text{(indépendante de } \theta\text{)}.$$

On dit que *la limite est uniforme en* θ si :

$$\text{il existe } \; G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ telle que } \quad \begin{cases} |g(\rho,\theta) - \ell| \le G(\rho), & \forall\, \rho > 0 \\ \lim_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Cette condition assure que, si $f(x, y) = g(\rho, \theta)$ (avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$), alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$$

Exercice 25 Pour chacune des fonctions $g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta)$. On précisera si :

1. La limite est indépendente de θ
2. La limite est uniforme pour $\theta \in [0, 2\pi[$

$$g(\rho,\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta + 3}, \qquad g(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho\ln(\rho\sin(\theta)), & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour $(x, y) \to (0, 0)$ de la fonction $f(x, y)$ définie par $f(x, y) = g(\rho, \theta)$.

***Exercice 26** Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Exercice 27 Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x^2+y^2+2xy-1}.$$

Exercice 28 Calculer les limites pour $(x, y) \to \infty$ des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2},$$

$$f(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2), \qquad f(x,y) = ye^x + \ln|y|.$$

Exercice 29 Déterminer tous les points du plan où la fonction définie par

$$f(x,y) = (x^2+3x+2)\sin(\pi/y), \qquad \text{si } y \neq 0$$

et $f(x, 0) = 0$ est continue.

Différentiabilité

***Exercice 30** Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

a) $f_1(x,y) = 3xy + e^y$ b) $f_2(x,y) = y\sin(2xy+1)$, c) $f_3(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$,
d) $f_4(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, e) $f_5(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

RAPPEL Soit f une fonction de n variables définie dans un voisinage de $\vec{0}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est *différentiable à l'origine* si

$$\lim_{X \to \vec{0}} \frac{||f(X) - f(\vec{0}) - (f'_{x_1}(\vec{0})x_1 + \cdots + f'_{x_n}(\vec{0})x_n)||}{||X||} = 0$$

(par conséquent, si l'une des dérivées partielles de f à l'origine n'existe pas, alors f ne pourra pas être différentiable en $\vec{0}$).

Si f est définie au voisinage d'un point $X_0 \in \mathbb{R}^n$, on dira que f est différentiable en X_0 si la fonction translatée $g(X) = f(X - X_0)$ est différentiable à l'origine. L'expression (notée souvent $d_{X_0}f$)

$$f'_{x_1}(X_0)\,dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(X_0)\,dx_n$$

s'appelle *différentielle de f en X_0*.
Remarque. Plus précisément, $d_{X_0}f$ est la fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$d_{X_0}f(x_1, \ldots, x_n) = f'_{x_1}(X_0)x_1 + \cdots + f'_{x_n}(X_0)x_n.$$

RAPPEL Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et f une fonction définie sur E. On dit que f est *de classe C^1* dans E si les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont continues en tout point de E. On définit de même la notion de fonction de classe C^k (avec $k = 2, 3, \ldots$).

RAPPEL

$$f \text{ différentiable en } X_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continue en } X_0$$

$$f \text{ de classe } C^1 \text{ au voisinage de } X_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ différentiable en } X_0.$$

***Exercice 31** Etudier la différentiabilité de la fonction $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^4+z^6}$.

***Exercice 32** Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Etablir si f est continue en $(0,0)$. Calculer les dérivées partielles premières. Etablir si f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 33 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(y,x)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de celles de f.

***Exercice 34** Soit l'application définie par:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f possède en $(0,0)$ des dérivées partielles dans toutes les directions mais n'est pas différentiable en ce point.

Exercice 35 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Exprimer au moyen de f' les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $g :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$.
2. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y,z) = f(z \sin x)$.

Exercice 36 Pour chaque application établir l'existence et calculer les dérivées partielles en tout point; les fonctions sont-elles de classe C^1 ? dans $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{cases} f(x,y) = x \text{ si } x > y \\ f(x,y) = y \text{ sinon} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x,y) = 1 - e^{1-(x^2+y^2)} \text{ lorsque } x^2+y^2 \geq 1 \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ lorsque } (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 37 Soit f l'application définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2x^3+3xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées directionelles en $(0,0)$ dans toutes les directions, puis $\nabla f(0,0)$. Etablir si f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 38 Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est différentiable en $(0,0)$. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. En déduire que f n'est pas de classe C^2.

Exercice 39 Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point $A \equiv (2,1)$.

Exercice 40 Trouver les différentielles de $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ et $z = x \sin y - y \sin x$.

Exercice 41 La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 1 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus (a) avec un calcul exact, (b) avec l'approximation fournie par la différentielle.

***Exercice 42** Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(x)$. Appliquer la formule aux cas particuliers

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$.
2. $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

***Exercice 43** Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à t de

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t,\ y = \cos t$;
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t},\ y = e^t$.

Exercice 44 Soit $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ Calculer Δf pour $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^\alpha$. Déterminer les valeurs de α telles que $\Delta f(x,y) = 0$.

Exercice 45 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Soit $F(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer $\Delta F(x,y)$.
2. Déterminer toutes les applications f de classe C^2 dans $\mathbb{R}^*$ telles que $\Delta F(x,t) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

***Exercice 46** Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Extrema

***Exercice 47**

1. Soit $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$. Montrer que l'origine est un point critique pour f et g et en déterminer la nature.

2. Supposons, plus en général, $f(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$, avec $r > 0$, $s,t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $rt - s^2 > 0$ alors l'origine est un point de minimum global strict pour f. Montrer que si $rt - s^2 > 0$ alors l'origine est un point de col. Que se passe-t-il dans le cas $r < 0$?

RAPPEL (formule de Taylor)
Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point (x_0, y_0). On a

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+xf'_x(x_0,y_0)x+yf'_y(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[r(x-x_0)^2+2s(x-x_0)(y-y_0)+t(y-y_0)^2\right]+R(x-x_0,y-y_0),$$

où $r = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $t = f''_{yy}(x_0,y_0)$. En outre, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x,y)/||(x,y)||^2 = 0$.

***Exercice 48**

1. Déterminer les points critiques de la fonction $f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$. Pour chaque point critique, écrire la formule de Taylor d'ordre 2 pour f, centrée à ce point. Etudier les extrema relatifs (ou locaux) de $f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$. Établir si f admet des extrema absolus (ou globaux).

2. Même questions pour

(a) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$	(b) $f(x,y) = xe^y + ye^x$
(c) $f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)}$	(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$
(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$	(f) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1$

Exercice 49 *Epreuve de Novembre 2003.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction f.

2. La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?

3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \le x \le 0,\ y = x+1\}.$$

Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à L et préciser en quels points de L ils sont atteints.

***Exercice 50** On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x + \sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local (iii) un point de minimum local strict (ou isolé).

***Exercice 51** *Epreuve de Mai 2001.* On considère la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion:* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extréma globaux.

***Exercice 52** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de f à T. Les déterminer.

Exercice 53 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global?

Exercice 54 Mettre sous forme canonique les formes quadratiques suivantes à l'aide le la méthode de Gauss. Etablir ensuite si elles sont définies positives ou négatives.

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + y^2 + xy + 2z^2 \\ Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \\ Q(x,y,z) &= 2xy - 3xz + 4yz \end{aligned}$$

Exercice 55 Ecrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + \frac{4}{3}z^3 + xy - 2x - y + 1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 56 Etudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x + xyz + y - z \\ f(x,y,z) &= x + y + z + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5 \\ f(x,y,z) &= 2xy - y - x^4 - z^2. \end{aligned}$$

Préciser si les extrema trouvés sont isolés.

Divergence. Rotationnel. Formes Différentielles

Exercice 57 Soient f une fonction et $\vec{V}$ un champ de vecteurs, de classe C^2 dans un ouvert de l'espace. Le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}(\nabla f + \overrightarrow{\text{rot}} V)$ est égale à :

$$\textbf{a)}\vec{0}, \quad \textbf{b)}\overrightarrow{\text{rot}}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}), \quad \textbf{c)}\nabla f \wedge \vec{V}.$$

***Exercice 58**

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $\vec{B}$ le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\vec{B}(x,y,z) = f'_y(x,y)\vec{i} - f'_x(x,y)\vec{j}$. Calculer div$\vec{B}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$.
2. Pour le champ de vecteurs $\vec{B} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 3yz^2\vec{k}$, trouver div$\vec{B}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$.

***Exercice 59** Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients (ou *champs conservatifs*), si oui déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$
2. $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$
3. $\vec{V}(x,y) = (\frac{x}{1+y^2}, \frac{y}{1+x^2})$
4. $\vec{V}(x,y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$. préciser l'ensemble de définition de $\vec{V}$),
5. $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

***Exercice 60** A tout point M de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\vec{u}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$. Montrer que la divergence de ce champ vectoriel est égale à $1/\parallel \vec{OM} \parallel$.

Exercice 61 Soit $\vec{V}(x,y) = (|x-y|^3 + (x+y)^5, (x-y)^3 + |x+y|^5)$. Etablir si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\vec{V}$ n'est pas un champ de gradient dans $\mathbb{R}^2$. Trouver un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (aussi grand que possible) tel que $\vec{V}$ soit un champ de gradient dans Ω.

Exercice 62 Soit le champ de vecteurs défini dans $\mathbb{R}^3$ par:
$\vec{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3, xz + x^3y^2, f(x,y))$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver les applications f pour que ce soit un champ de gradients. Calculer alors les potentiels de $\vec{V}(x,y,z)$.

***Exercice 63** Par définition, un champ $\vec{V}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est *central*, s'il existe ϕ: :: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dérivable dans $\mathbb{R}^*$ telle que pour tout point M de $\mathbb{R}^3$, $M \neq 0$, on a $\vec{V} = g(\parallel \vec{OM} \parallel^2)\vec{OM}$. On considère le champ gravitationnel engendré par une masse d'un kilo à l'origine. Trouver ϕ (appliquer la loi de Newton).

***Exercice 64** Montrer qu'un champ central de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est toujours un champ de gradient. Calculer ensuite un potentiel.

En déduire l'expression du potentiel gravitationnel

***Exercice 65** Déterminer si les formes differentielles suivantes sont des formes differentielles exactes :

a) $2(x+y)dx+2(x-3)dy$, b) $\cos(x)dx+\sin(y)dy$, c) $(x+y)dx+(x-y)dy$,
d) $(\sin y - y\cos x)dx + (x\cos y - \sin x)dy$, e) $(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$.

Exercice 66 On considère la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Montrer en passant en coordonnées polaires que ω est est la forme différentielle totale d'une fonction $U(\rho,\theta)$ et donner l'équation des courbes $U = Cte$.

Exercice 67 Montrer que l'expression

$$\omega(x,y) = \frac{xdx}{x^2+y^2} + y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$$

est la différentielle totale d'une fonction f que l'on déterminera.

Exercice 68

1. Montrer que la forme différentielle $\omega(x,y) = (x+\cos y)\,dx - x\sin y\,dy$ est exacte et calculer une primitive f de ω
2. Déduire de la question précédente la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{x+\cos y}{x\sin y}, \tag{$*$}$$

vérifiant $y(1) = \frac{\pi}{2}$. Préciser l'intervalle de définition de cette solution.
(*indication :* montrer que si $y(x)$ est une solution de $(*)$, alors la fonction $x \mapsto f(x, y(x))$ est constante).

Exercice 69

1. Trouver une fonction non nulle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \varphi(x)(x+y+1)y\,dx + \varphi(x)(2y+x)\,dy$$

soit exacte dans $\mathbb{R}^2$. Calculer ensuite une primitive de ω.

2. Déduire de la question précédente la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{(x+y+1)y}{2y+x}$$

telle que $y(1) = -1$.

Courbes paramétrées

***Exercice 70** Paramétrer la courbe $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

***Exercice 71** Trouver les équations de la droite tangente et du plan normal à la courbe $x = t-2, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 72 Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Donner une paramétrisation de la ligne de niveau de f passant par (a, b). Calculer l'amplitude de l'angle formé par cette ligne et le vecteur $\nabla f(a, b)$.

Exercice 73 Calculer la longueur de l'arc de parabole défini par $y = ax^2$ pour $0 \leq x \leq 1$, avec $a > 0$.

Exercice 74
La *spirale logarithmique* est définie par $\gamma(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t)$, $a > 0$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

***Exercice 75**

1. Déterminer la longueur de l'arc de courbe (appellée *cycloïde*) défini par

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

2. On considère l'hélice circulaire à pas constant définie par

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ht \end{cases}$$

- Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
- Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 76

1. Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$ et $\theta = \theta(t)$, où $t \in [a, b]$. Montrer que la longueur de Γ est
$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\, dt.$$
En déduire une formule pour la longueur d'une courbe définie en *forme polaire* (c'est à dire, une courbe paramétrée par $\rho = \rho(\theta)$).

2. Tracer et calculer la longueur des courbes définies par
$$\begin{array}{lll} \rho = \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi & \\ \rho = 2(1 + \cos\theta), & -\pi \leq \theta \leq \pi & \textit{(cardioïde).} \end{array}$$
Ces paramétrisations sont-elles régulières ? La droite tangente à ces courbes en $(0, 0)$ existe-t-elle ?

Intégrales curvilignes. Intégrales doubles

***Exercice 77** Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{C^+} (2x-y)dx + (x+y)dy, \qquad \int_{C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$$

où C^+ est le cercle de centre R et de centre O décrit complètement dans le sens direct.

***Exercice 78** Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée γ^+ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens direct avec

$$I = \int_{\gamma^+} (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Exercice 79 Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 80

1. Calculer $\displaystyle\iint_D (x-y)\, dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :
$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x$$
2. Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :
$$u = x+y, \qquad v = x-y$$

Exercice 81 Calculer $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 82 Trouver le centre de gravité de la plaque homogène donnée par la surface délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

***Exercice 83** *(juin 2004)*

1. Dessiner l'ensemble $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y - x \le 1,\ 0 \le 2x - y \le 1\}$.
2. Calculer l'intégrale double
$$\iint_P (2x^2 - 3xy + y^2)\, dx\, dy$$
à l'aide du changement de variable $u = y - x$, $v = 2x - y$.

3. Calculer l'aire de P.

***Exercice 84** *(juin 2004)* On considère la plaque homogène définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 25,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}.$$

1. Dessiner l'ensemble D et calculer son centre de gravité.
2. Calculer les moments d'inertie de D par rapport au point $(0,0)$ de deux manières différentes : (a) en utilisant les coordonnées polaires, (b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 85 Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'exterieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 86 Calculer $I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$

***Exercice 87** Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\, dxdy.$ avec $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$. On considère le changement de variables $\left\{\begin{array}{l} x = tu \\ y = (1-t)u \end{array}\right.$. Calculer I.

Exercice 88 Aire en coordonnées polaires

Soit D le domaine limité par $r = p(\phi)$ avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$; et le segment $\left\{\begin{array}{l} \phi = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{array}\right.$

1. Montrer que $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2(\phi)\, d\phi$
2. Calculer l'aire de la cardioïde: $r = 1 + \sin(\phi)$.
3. Calculer l'aire de l'escargot; $r = a\phi$
4. Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y
5. Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.

***Exercice 89** Soit D le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + z \leq 1\}$. Représenter graphiquement D. Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple

$$\iiint_D x\, dx\, dy\, dz$$

(a) en intégrant "par fils", (b) en intégrant "par couches".

***Exercice 90** Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.

4 Surfaces

Exercice 91 Représenter graphiquement les surfaces de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\vec{S}\ :\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\sqrt{u^2+v^2} \end{cases},\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2,\qquad \vec{S}\ :\begin{cases} x=u^2 \\ y=v \\ z=u \end{cases},\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

***Exercice 92**

1. Donner une paramétrisation du cylindre infini, d'axe Oy et rayon $R>0$.
2. Paramétrer la sphère centrée à l'origine et de rayon $R>0$. Donner l'expression du verseur normal extérieur en tout point (a) en coordonnées cartesiennes, (b) en coordonnées sphériques (longitude et latitude).

***Exercice 93** On considère une lamelle sphérique de rayon R et densité surfacique d_0 (constante).

1. Calculer la masse da la lamelle
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
3. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

***Exercice 94** On considère une balle de rayon R et densité volumique d_0 (constante).

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

***Exercice 95** Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma=\big\{(x,y,f(x,y))\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\big\}.$$

Montrer que, pour tout point (x,y), le verseur normal à Σ au point $(x,y,f(x,y))$ est $\vec{n}(x,y)=\frac{(-f'_x,-f'_y,1)}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}$.

Exercice 96

1. Calculer l'intégrale sur la surface

   $$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z=x^3,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le\pi\}$$

   de la fonction définie par $f(x,y)=3x^3\sin y$.
2. Calculer l'intégrale sur la surface définie par

   $$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x^2+y^2=1,\quad 0\le z\le 3\}$$

   de la fonction définie par $f(x,y)=x+1$.

Exercice 97 Trouver l'équation du plan tangent en $A \equiv (1,0,1)$ à la surface Σ paramétrée par $\vec{S}\ : \begin{cases} x = u - v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} , \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$
Déterminer ensuite une équation cartésienne de cette surface.

***Exercice 98** Calculer le flux à travers la surface limité par l'ellipse d'équations $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$
(avec $a > 0$ et $b > 0$)

1. du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{V}(x,y,z) = (1,2,3)$
2. du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{W}(x,y,z) = (z,y,x^2)$.

5 Théorèmes de Stokes et Ostrogradski

Exercice 99 Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,-z)$ à travers la demi-sphère

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

***Exercice 100** Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

1. directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Exercice 101 On considère l'intégrale $\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, où C est le cercle d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes. Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

***Exercice 102** Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

1. directement. 2. A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

***Exercice 103** On considère la boîte cylindique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$ et de deux disques de rayon R aux niveau $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$). Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si $\vec{V}$ est un champ de gradient.
2. Déterminer si $\vec{V}$ est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S directement.
4. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.