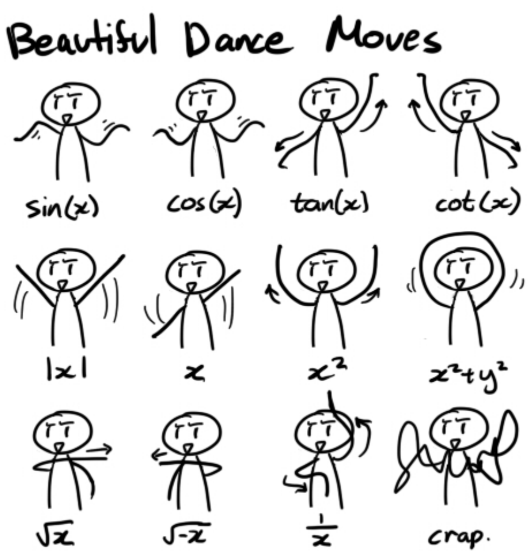
Laurent Pujo-Menjouet
Département de mathématiques
Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Mention mathématiques
Portail Math/Info
Portail Math-Eco
pujo@math.univ-lyon1.fr

Fondamentaux des mathématiques 1



Université Claude Bernard Lyon 1

Préambule

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse et algèbre accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse et algèbre de la licence. Étant donné que le recrutement en première année est assez hétérogène, il semble assez judicieux de commencer par rappeler les notions élémentaires qui serviront tout au long de ce cours, histoire de ne perdre personne en route.
Quand il sera nécessaire au début de chaque chapitre, nous rappellerons ce qui est censé être connu en Terminale. Nous essaierons également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre sur une page, histoire de synthétiser les connaissances à bien maîtriser pour passer au chapitre suivant.
Nous fournirons autant d'exemples et de figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours. Nous essaierons également de souligner les pièges dans lesquels chacun peut se fourvoyer soit par inattention, soit par une mauvaise maîtrise du cours.
Pour information, le programme officiel de cette U.E. se trouve **ici**,

Table des matières

Liste des figures

Chapitre 0

Conseils pour bien commencer

Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire.

Antoine Rivaroli, dit comte de Rivarol, 1753–1801

Sommaire

0.1 Conseils élémentaires sur les méthodes de travail

Avant toute chose, je souhaite rappeler ici les 4 fondamentaux en méthode de travail pour un semestre réussi. Ces 4 principes sont assez basiques, mais si vous les respectez, vos chances de réussite seront augmentées de façon significative. Le mot-clé est **ANTICIPER**.

1. **Arriver en avance en cours et TD** : par respect pour vous-même, pour vos chargés de cours magistraux (CM), de travaux dirigés (TD), d'études surveillées (ES) et pour les autres étudiants il est plus que recommandé d'arriver en avance. Ceci est valable également pour les examens et les différents contrôles durant le semestre. Il faudra pour ça, **ANTICIPER** votre réveil et votre trajet jusqu'à l'université. L'appel sera fait lors de chaque séance de travaux dirigés.
2. **Être concentré, écouter et participer** : que ce soit en CM ou en TD, il **FAUT ÉCOUTER ET PARTICIPER**. Comprendre en cours, c'est déjà plus de 50% du travail effectué. Ceci implique, comme au lycée : pas de téléphone, pas d'écouteurs et dans la mesure du possible pas d'ordinateur. Moins il y a de tentations pour être déconcentré mieux c'est. Il faut donc **ANTICIPER** en copiant ou imprimant ce cours et ranger ou éteindre vos téléphones.
3. **Apprendre ses cours et s'entraîner** : en mathématiques, le talent a ses limites comme pour toute discipline. Pour réussir, il faut apprendre le cours le plus régulièrement possible. **Un bon conseil est de l'apprendre avant chaque séance de TD**. C'est lors de ces séances que l'on assimile à la fois le cours, les méthodes pour l'appliquer, les astuces à retenir et les pièges à éviter. Mais faire les exercices de TD (ou les refaire) **NE SUFFIT PAS**. Il faut s'entraîner encore et encore, aller à la bibliothèque, trouver des livres d'exercices et essayer de les résoudre seuls, sans l'aide de la solution, afin de de connaître et d'**ANTICIPER** ses propres capacités. Voir les compétences que vous avez acquises, les notions de cours qui ne sont pas encore bien claires, puis vérifier avec la solution si vous avez bien compris.
4. **Savoir demander de l'aide** : si vous avez des difficultés à suivre le cours, à faire des exercices, que vous pensez ne pas avoir le niveau, que vous pensez être submergés et complètement perdus, plusieurs solutions sont à votre disposition : vos chargés de CM et de TD, vos professeurs référents, les études surveillées et le tutorat. N'hésitez donc pas à utiliser ces moyens, ils sont là pour ça. Mais dans tous les cas, **ANTICIPEZ** avant qu'il ne soit trop tard.

En résumé : arrivez à l'heure, apprenez vos cours, entraînez vous, soyez concentrés et n'hésitez pas à vous faire aider.

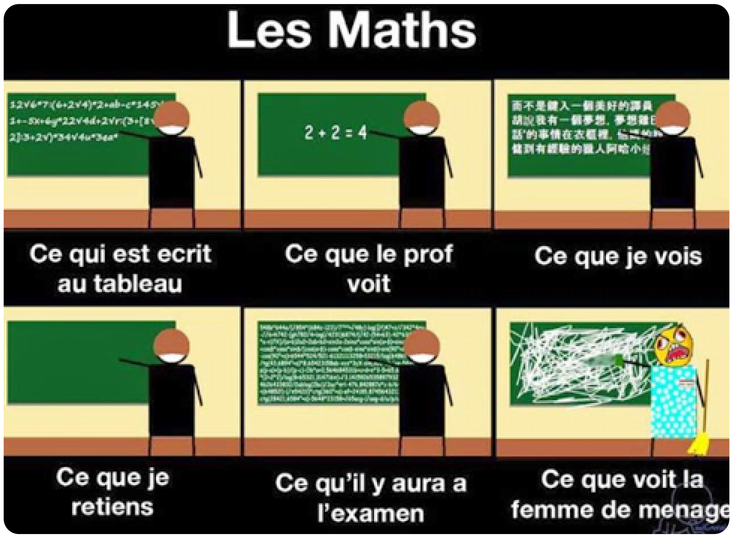


FIGURE 1 – Les maths vues par...

0.2 Conseils fondamentaux pour bien rédiger

Il se trouve, par expérience, que pour la plupart d'entre vous, arrivant en première année, rédiger ou raisonner en mathématiques ne signifie pas grand chose de précis et ne semble pas important. Cette section va tenter de vous montrer le contraire. En fait, nous allons voir que faire des mathématiques revient à la même chose que créer de bons plats, ou plutôt des pâtisseries, qui demandent encore **plus de soin et de précision**. Vous allez voir que si l'on ne connaît pas le nom des ingrédients, des ustensiles, si l'on ne suit pas les instructions avec beaucoup de rigueur, **le résultat peut s'avérer désastreux**.
Un autre exemple peut se trouver en informatique, où, si l'on ne respecte pas le cahier des charges, si l'on ne sait pas rédiger proprement en langage approprié, et tout simplement, si l'on ne définit pas ce que l'on va utiliser dans le programme, on aura beau avoir le plus bel ordinateur du monde, rien ne se passera comme prévu, si toutefois il se passe quelque chose.
Et bien pour les mathématiques c'est exactement pareil !
Pour être le plus clair possible dans la rédaction nous vous conseillons donc deux choses fondamentales :

1. **se conformer aux conventions utilisées par tous,**
2. **raisonner en utilisant tous les outils que l'on mettra à votre disposition.**

Avec l'expérience, vous développerez, je l'espère de l'intuition pour justement trouver des raisonnement inédits, des idées nouvelles, et des résultats encore meilleurs que ceux déjà existants.
Pour une lecture plus facile de ce chapitre nous allons donner un code simple :
- ce symbole ✓ utilisé quand nous proposerons **une formulation correcte de rédaction**,

- ce symbole utilisé quand nous proposerons **une formulation incorrecte ou qui peut présenter un danger dans le raisonnement**. Reprenons l'exemple du cours de pâtisserie. En général, la première chose que l'on lit dans une recette, après le nom du gâteau ou de l'entremets qui pourrait nous mettre l'eau à la bouche, c'est la liste des ingrédients. Que sont pour nous les ingrédients ? Ce sont tous les éléments que nous allons introduire pour résoudre notre problème. D'où la première règle

TOUJOURS INTRODUIRE LES NOTATIONS QUE L'ON VA UTILISER !

FIGURE 2 – Tant qu'à faire, autant donner une bonne recette de fondant au chocolat (lien vers le site de la recette)

0.3 Conseils fondamentaux pour bien rédiger

0.3.1 Comment présenter tous nos éléments proprement

En mathématiques, comme en pâtisserie, il y a une façon de présenter que l'on va utiliser **le plus proprement possible, en respectant certaines règles**. C'est que nous allons voir ici. En général nous le faisons en tout début de nos problèmes, mais il se peut que nous ayons besoin de nouvelles notations au cours du raisonnement, il faudra alors ne pas oublier de présenter ces éléments nouveaux également en général à l'endroit où l'on s'en sert. Montrons comment on procède avec deux notions fondamentales en mathématiques : les variables et les fonctions.

0.3.2 Comment introduire une variable

Les deux façons d'introduire une variable x qui décrit un ensemble E sont les suivantes :

1. ✓ **Soit x un élément de E (que l'on peut écrire : soit $x \in E$),**
2. ✓ **Pour tout x élément de E (que l'on peut écrire : pour tout $x \in E$).**

Si jamais vous n'introduisez pas les éléments que vous allez utiliser, vous allez droit vers des problèmes à la fois de rédaction mais également de raisonnement.
Par exemple, si l'on vous demande de montrer si l'égalité suivante $x/(1+x) = 1 - 1/(x+1)$ est vraie. Vous allez tout de suite vous lancer dans les calculs. **Et pourtant ce sera faux !**
En effet, vous ne pouvez pas écrire

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Tout semble juste dans les calculs. Mais le correcteur vous dira que c'est faux. Pour quelle raison ? Parce que si $x = -1$ le dénominateur vaut 0, et **ON NE DIVISE PAS PAR 0 !**
Comment bien rédiger ce calcul alors ? Tout d'abord identifier ce dont on va parler : ce sera x. Cette variable x sera un élément des réels que l'on note $\mathbb{R}$. Mais on voit que pour une valeur, $x = -1$, le dénominateur s'annule, et justement les calculs ne marcheront pas pour cette valeur.
Il faut donc faire bien attention à traiter ce problème pour tous les x réels sauf -1. Et on écrit,

1. ✓ Soit x un réel différent de -1 (ou encore de façon abrégée : soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$), alors

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

   ou bien,

2. ✓ Pour tout x réel différent de -1 (ou encore de façon abrégée : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$), alors

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Dans les deux cas, on sait que l'on parle de réels, et surtout que l'on a bien vu que -1 allait poser un problème.
Vous verrez que même si ça semble évident, on n'attrape pas le réflexe comme ça. Il faut un temps d'adaptation en se forçant un peu et en rédigeant dès le début avec cette rigueur. Ça deviendra ensuite une bonne habitude que vous garderez.

0.3.3 Comment introduire une fonction

Nous reparlerons plus tard dans le cours des fonctions, mais tant que nous sommes dans les conseils de rédaction, nous pouvons en parler déjà ici.
Il ne faudra pas confondre la fonction f avec $f(x)$ qui désigne la valeur de f en x, et qui représente une valeur. On n'écrit donc pas

Étudions la fonction $x^2 + 3$. Non !

Une fonction comme nous le verrons est une relation qui associe à tout élément (ici x) d'un certain ensemble, un autre élément d'un autre ensemble). Nous écrivons

✓ On note f la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ définie sur $\mathbb{R}$,

ou encore

✓ On note f la fonction $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array}\right.$.

Notez la différence pour cette notation entre les flèches : $\to$ met en relation les ensembles et $\mapsto$ met en relation les éléments. Mais nous y reviendrons. Nous avons enfin la notation

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$.

Nous verrons comment bien rédiger d'autres choses sur les fonctions quand nous viendrons au chapitre les concernant.

0.4 Conseils pour bien raisonner

Un des objectifs de ce cours est également de vous apprendre à raisonner. Les conseils, les méthodes et les compétences que l'on vous présentera, iront bien au-delà des cours de mathématiques. Ils vous seront très utiles pour toutes les autres disciplines : comprendre les enchaînements logiques des raisonnements, bien les articuler en faisant attention au sens des mots : "donc", "par conséquent", "parce que", "il existe", "pour tout", "en effet"... Chaque mot que vous allez employer est important. Nous vous proposerons plusieurs façon de prouver des résultats : par l'absurde, par récurrence, etc.
Rappelons enfin les différentes formes d'énoncés que vous allez rencontrer tout au long de ce cours :

1. **Axiomes :** nous ne les introduirons pas dans ce cours mais il faut savoir qu'ils existent. Ce sont des propositions que la théorie considère vraies sans démonstration. Ce sont les fondements des mathématiques.
2. **Définitions :** nous en introduirons beaucoup dans ce cours. C'est le fait donner un nom à un objet ou un concept vérifiant une certaine propriété non encore introduite en mathématiques.
3. **Théorèmes :** nous en utiliserons beaucoup également dans ce cours. Un théorème est une affirmation ou une proposition que l'on peut démontrer par un raisonnement logique fondé sur les axiomes.
   Les énoncés de ces affirmations peuvent aussi prendre plusieurs noms :
   (a) **Lemmes :** ce sont des résultats en général très courts, dont la preuve est courte également, qui seront utilisés dans la preuve d'un théorème plus important. Les lemmes sont donc des résultats intermédiaires qui permettent de structurer les preuves de théorèmes, et de les rendre plus clairs,
   (b) **Propositions :** ce sont des résultats plus simples que des théorèmes, et donc qui ne "méritent" pas de porter le nom de théorème,
   (c) **Corollaires :** ce sont des résultats que l'on doit démontrer également et qui découlent d'un théorème qui les précède (une sorte de conséquence),
   (d) **Propriétés :** les propriétés se démontrent en général à la suite de la définition d'un objet ou d'une notion mathématique, dont on peut tirer directement, sans grande démonstration, des résultats. Ce sont des résultats plus simples que des propositions et donc des théorèmes.

0.5 Tableau des lettres grecques

Beaucoup de lettres seront utilisées, que ce soit pour les énoncés de définition ou de résultats comme pour les preuves. A toutes fins utiles, nous vous les rappelons dans leur forme majuscule, minuscule et dans leur prononciation.

Majuscules	Minuscules	Noms	Majuscules	Minuscules	Noms
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zêta ou Dzêta	Σ	σ	Sigma
H	η	Êta	T	τ	Tau
Θ	θ	Thêta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ ou ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi (se lit “Ki”)
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

FIGURE 3 – Alphabet grec.

Première partie

Partie A

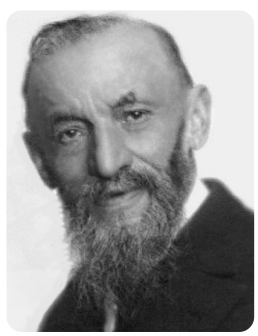
Chapitre 1

Calculs algébriques

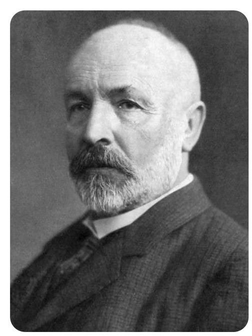
J'ai profondément regretté de ne pas avoir été assez loin pour au moins comprendre un petit peu des grands principes fondamentaux des mathématiques : car les hommes qui les ont acquis semblent avoir un sens supplémentaire – un sixième sens.

Charles Darwin

(a) **Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), mathématicien allemand, fut un des fondateurs de l'axiomatisation de l'arithmétique. On lui doit notamment une définition axiomatique de l'ensemble des nombres entiers ainsi qu'une construction rigoureuse des nombres réels à partir des nombres rationnels.**



(b) Giuseppe Peano (1858 – 1932), mathématicien italien, un des fondateurs de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, parallèlement à l'allemand Richard Dedekind, une axiomatisation de l'arithmétique en 1889. On lui doit notamment la notation $\mathbb{Q}$.



(c) **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), mathématicien allemand, créateur de la théorie des ensembles. Il montra entre autres choses que les nombres réels sont « plus nombreux » que les entiers naturels. C'est à lui que l'on doit la notation $\mathbb{R}$.**

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des nombres entiers, rationnels et réels.

Sommaire

Compétences à acquérir dans ce chapitre

1 - □ Savoir utiliser les notations $\sum$ et $\prod$ et y changer d'indice.
2 - □ Savoir utiliser les coefficients binomiaux.
3 - □ Savoir utiliser les égalités, inégalités et valeurs absolues.

Il est possible de trouver des cours et des exercices dans de nombreux ouvrages disponibles à la bibliothèque. Ceux que je suggère pour ce chapitre sont ceux de Bodin *et al.* [1] [?], [?], Costantini [?], Liret et Martinais [?], Martin *et al.* [?] et Rondy *et al.* [?]. mais la liste n'est pas exhaustive.

1.1 Un peu d'histoire

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Pour mémoire, le calcul a été inventé avant l'écriture (il y a 20 000 ans mais certains disent 35 000 et d'autres plus). Il s'agissait de compter avec des cailloux (calculus en latin) afin d'évaluer des quantités entières.

1. *et al.* est une abréviation du latin ***et alii*** qui signifie "**et les autres personnes**"

Ces entiers naturels permettaient de résoudre des équations du type $x + 3 = 5$ par exemple. Cet ensemble sera par la suite noté $\mathbb{N}$ en 1888 par **Richard Dedekind** (pour “nummer” qui signifie numéro en allemand).
On notera ainsi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Notons au passage, que c’est **René Descartes** qui suggéra par convention (que l’on garde encore aujourd’hui) de noter les inconnues par les dernières lettres de l’alphabet et de garder les premières lettres pour les paramètres connus. Il s’avéra très vite que les entiers ne pouvaient pas résoudre certaines équations comme $x + 5 = 3$. Il fallut alors introduire un ensemble agrandi du précédent, que l’on appellera entiers relatifs (par rapport à leurs positions à 0). Dedekind notera l’ensemble $\mathbb{K}$, mais on retiendra plutôt la notation $\mathbb{Z}$ (pour zahlen qui signifie nombre en allemand) de **Nicolas Bourbaki**.
On notera ainsi

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Il fallut ensuite résoudre des équations du type $x \times 3 = 5$. On ne pouvait pas trouver toutes les solutions dans l’ensemble $\mathbb{Z}$. Un autre ensemble fut alors introduit. L’ensemble des rationnels permettait de contenir l’ensemble des solutions de ce type d’équation, et il fut noté $\mathbb{Q}$ par **Giuseppe Peano** en 1895 (initiale du mot “quoziente” (quotient) en italien).
On notera ainsi

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers relatifs et } b \neq 0\}.$$

Il ne faut cependant pas confondre les rationnels $\mathbb{Q}$ avec les décimaux $\mathbb{D}$. Les nombres décimaux sont de la forme $a.10^n$ où a et n sont des entiers relatifs. Un nombre décimal a donc un nombre fini de chiffres après la virgule : par exemple $1,23$ s’écrit 123.10^{-2}. Tandis qu’un nombre rationnel est de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier relatif différent de zéro. C’est d’ailleurs ici que commence le premier piège qu’il faudra éviter et qui semble assez évident a priori : **on ne divise pas par 0 !**
Un nombre décimal est donc un cas particulier de nombre rationnel.

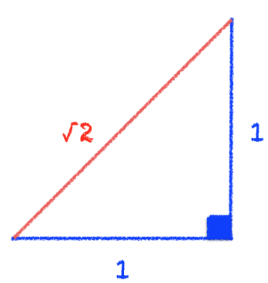


FIGURE 1.2 – Triangle rectangle de côtés 1, 1 et $\sqrt{2}$.

Vint enfin une équation assez simple à résoudre $1^2 + 1^2 = x^2$, autrement dit $x^2 = 2$. Cette équation provenant d’un problème géométrique élémentaire (le théorème de Pythagore) n’est pas récente (dans une version différente, évidemment). Elle date de 500 ans avant J-C environ.

FIGURE 1.3 – Hugues Charles Robert Méray (1835 à Chalon-sur-Saône -1911), un mathématicien français, professeur à la faculté des sciences de Lyon. En 1869, il donne, le premier, une construction rigoureuse des nombres réels.

Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ datant à peu près de cette époque est mentionnée dans les manuscrits d'**Aristote**. Il fallut donner un nom à l'ensemble de ces nombres qui contenait tous les précédents (entiers et rationnels) mais qui n'étaient ni entiers ni rationnels. **René Descartes** les appela nombres réels en 1637 et c'est **Georg Cantor** qui désignera l'ensemble des réels par $\mathbb{R}$.
Augustin Cauchy, puis **Charles Méray** suivi de **Georg Cantor** établiront que l'ensemble des réels est complet. Autrement dit, contrairement à l'ensemble des rationnels qui contenait encore des "trous" que l'on pouvait remplir avec des réels, l'ensemble des réels ne possède pas de trou. On dit qu'il est complet. Cette notion sera très utile dans la suite des cours d'analyse.

Puis vinrent les nombres complexes et d'autres équations de plus en plus élaborées à résoudre. Nous en aborderons quelques unes dans ce cours (comme les équations différentielles). Pas toutes, ce serait impossible, mais celles qui nous semblent incontournables pour le premier semestre de la première année en analyse. Pour cela il faudra définir les bons outils, leur manipulation précise et rigoureuse (ce que l'on peut faire et ce que l'on ne peut pas faire). Une fois les outils en main nous avancerons progressivement de telle sorte qu'à la fin du semestre, nous aurons effleuré la puissance d'applications de ce que l'on aura appris.

Nous pourrons nous trouver de temps en temps devant des concepts qui pourraient aller à l'encontre de nos intuitions. Comme par exemple :

1. **Est-ce que le nombre "juste avant" 1 que l'on note $x = 0.999999999...$ est égal à 1 ?**
2. **Est-ce que l'ensemble des entiers est plus grand que celui des entiers relatifs, lui même contenu dans les rationnels ? Et que dire de l'ensemble des réels ?**

Les réponses à ces questions ne doivent pas être données si rapidement...nous verrons en cours pourquoi.

1.2 Sommes

Nous allons dans ce chapitre poser les bases de certaines calculs, de certaines notations et surtout de certains résultats concernant *les sommes et les produits* que l'on considèrera avec

le temps comme classiques. Il faudra prendre le temps de tout lire, prendre le temps de comprendre et surtout faire un maximum d'exercices pour s'approprier les résultats.
Nous débuterons par le plus simple : **les sommes**.

1.2.1 Le symbole $\sum$

Commençons par un exemple pour nous fixer les idées.

Exemple *L'écriture*

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k,$$

se lit "somme pour k allant de 0 à 5 de 2 à la puissance k." Et c'est l'écriture abrégée de

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

Le symbole $\sum$ se lit sigma. C'est la majuscule de la lettre grecque S, pour...Somme. La lettre k est ce qu'on appelle l'indice de sommation. On remplace cette lettre par toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 5 ici. Par convention, la première valeur de k est écrite en dessous de $\sum$ et la dernière valeur au-dessus. Par conséquent, la valeur du bas sera toujours inférieure ou égale à celle du haut.

Nous voyons bien dans cet exemple l'utilité de la notation abrégée. En effet, si jamais k allait de 0 à 100 par exemple, écrire tous les termes de la somme serait assez fastidieux. Et donc, quand nous pourrons simplifier les écritures, nous le ferons avec plaisir. Par contre, au début, nous pourrons l'écrire sous forme "développée", c'est à dire, sans l'abréger, mais en mettant trois petits points entre les premiers et les derniers termes.
Pourquoi ? Tout simplement parce que lorsque nous n'avons pas l'habitude de rédiger en abrégé, le fait de passer par la version développée permet d'avoir des idées plus claires.
Par exemple, si on suppose que k va de 0 jusqu'à un entier n dans l'exemple précédent, nous écrirons

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + 2^n.$$

Nous ne savons pas pour l'instant combien ça vaut. Mais nous savons déjà l'écrire. Maintenant que nous avons vu un exemple, nous pouvons donner une première définition.

Notation 1 (Symbole $\sum$ et indice de sommation)

Soient m, n **deux entiers naturels** et $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ des **nombres réels quelconques**. On pose

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + ... + a_{n-1} + a_n & \text{si } \ m \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre k est appelé **indice de sommation** et l'expression se lit "**somme des a_k pour k allant de m à n**".

Plusieurs remarques sont à faire ici.

Remarques 1.1

1. ***La notation*** $\sum_{k=m}^{n} a_k$ ***s'écrit également*** $\sum_{m \leq k \leq n} a_k$.
2. ***Comme nous le voyons dans la notation ci-dessus,*** k ***n'est pas obligé de commencer à*** 0***. Il peut commencer où il veut, à partir de n'importe quelle valeur entière*** m***. Nous verrons plus tard que l'on pourra donner des valeurs négatives. Mais nous nous contenterons pour l'instant des valeurs positives.***
3. ***La variable*** k ***est "muette". Autrement dit, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre SAUF les variables de départ et celle d'arrivée si elles sont données par des lettres !***
   Par exemple on n'écrit pas

   $$\sum_{k=1}^{k} k^2, \quad \textbf{\textit{n'a pas de sens !}}$$

   De même, le résultat d'une somme ne peut pas dépendre de l'indice de sommation, c'est une variable muette !
   Par contre, on peut écrire

   $$\checkmark \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2, \quad \text{etc.}$$

Un exemple pour s'entraîner :

Exemple *Que vaut*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} ?$$

Réponse : *remplaçons par la forme développée pour voir (celle avec des petits points) :*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} = (2^0 + \ldots + 2^n) + (2^{n+1} + \ldots + 2^{2n}).$$

Cette formule se simplifie grandement, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} = \sum_{k=0}^{2n} 2^k.$$

1.2.2 Attention à l'indice de sommation

Il se peut que l'indice de sommation n'apparaisse pas dans la somme. Que se passe-t-il alors ? Voyons ça sur un exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17.$$

C'est une somme du même terme. Combien de fois fait-on cette somme ?
-Si n était égal à 1 on la ferait pour $k = 0$ et $k = 1$, ce qui ferait $17 + 17 = 17 \times 2$.
-Si n était égal à 2, on la ferait pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, ce qui ferait $17+17+17 = 17\times 3$.
-Si on prend n quelconque, on voit assez facilement que cela ferait $17 + ... + 17$ non pas n fois mais $n + 1$ fois ! Il faut compter le 0 du premier $k = 0$. Et donc le résultat serait :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17 = 17 \times (n + 1)$$

En fait, on factorise l'élément de la somme et on le multiplie par le nombre de termes :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17 = 17(1 + 1 + ... + 1) = 17. \sum_{k=0}^{n} 1 = 17 \times (n + 1)$$

Attention : **si l'on part de $k = 0$ et que l'on va jusqu'à $k = n$ dans une somme, il y aura $n + 1$ termes, mais si l'on part de $k = 1$ et que l'on va jusqu'à $k = n$, il y aura n termes dans la somme.**
Il faut toujours faire attention à ça !
De même un dernier exemple un peu plus subtil mais qui pourra vous faire rendre compte de la différence entre l'indice de sommation et les bornes de la somme.

Exemple *Que vaut*

$$\sum_{k=1}^{n} 2^n ?$$

Réponse : *ça a l'air assez similaire à ce que l'on vient de faire. La seule différence réside dans l'exposant de 2 qui est n et non pas k.*
Autrement dit, l'indice de sommation n'apparaît pas dans l'élément que l'on somme ! Et bien on se retrouve comme dans l'exemple précédent, on factorise par 2^n et on multiplie ce nombre par le nombre de termes de la somme (remarquons que l'on part de $k = 1$ ici) :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^n = 2^n \sum_{k=1}^{n} 1 = 2^n \times n.$$

En fait, comme dans la notation 1, nous pouvons commencer par ce que l'on veut. Par exemple, si l'on commence par $k = m$ et on termine par $k = n$ avec $m \leq n$ alors le nombre de termes de cette somme entre m et n est $n - m + 1$. Ne pas oublier le $+1$! Il suffit de le vérifier si $n = m + 1$, $n = m + 2$, etc. On aurait ainsi

$$\sum_{k=m}^{n} 2^n = 2^n \sum_{k=m}^{n} 1 = 2^n \times (n - m + 1).$$

1.2.3 Changement d'indice

Nous pouvons également changer d'indice, ça arrive quelques fois quand nous souhaitons simplifier une formule. Ainsi, par exemple, si l'on considère des réels a_j, $j = 1, ...n$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

et

$$\sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ce sont les mêmes sommes, les indices ont changé et les bornes de la somme aussi.
De façon générale, nous avons, pour m, n, p entiers naturels, $n \geq m$ et a_j réels avec $j = m, ..., n+p$

$$\sum_{k=m}^{n} a_{p+k} = \sum_{l=m+p}^{n+p} a_l.$$

1.2.4 Sommes doubles

Il arrive quelques fois que nous ayons besoin de faire la somme sur des réels possédant deux indices. Comment notons nous cela ? Et surtout comment est-ce que nous pouvons la calculer. Si l'on considère n et m deux entiers naturels et $a_{i,j}$ des réels avec $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$, alors la somme des réels $a_{i,j}$ s'écrit

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}.$$

Si $n = m$, nous notons plutôt

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}.$$

Nous pouvons remarquer les résultats suivants :

1. **pour tous $a_{i,j}$ réels, avec $i, j = 1, ..., n$**

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

2. **si i et j sont dans un ordre précis au sens large (notez le $\leq$ entre i et j)**

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j},$$

3. **si i et j sont dans un ordre précis au sens strict (notez le $<$ entre i et j)**

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

1.2.5 Quelques règles de calcul

Rappels

Rappelons les règles de calcul suivantes :

Propriété 1 (Règles de calcul)

Soient a, b et c trois nombres réels. On pourra écrire $a, b, c \in \mathbb{R}$. On notera l'addition $+$ et la multiplication $\times$ ou rien du tout ($a \times b$ ou ab quand il n'y a pas d'ambiguïté). On a alors les règles de calcul suivantes :

1. **Commutativité** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$a + b = b + a \text{ et } ab = ba,$$
2. **Associativité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ et } a(bc) = (ab)c,$$
3. **Distributivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$(a + b)c = ac + bc,$$
4. **Éléments neutres pour $+$ et pour $\times$** : quel que soit le nombre réel a,
$$a + 0 = a \text{ et } a \times 1 = a.$$

Somme de $\sum$

Nous pouvons énoncer les règles de calculs pour les $\sum$.

Propriété 2 (Somme de $\sum$)

Soient m et n deux entiers tels que $n \geq m$, soient a_k et b_k pour $k = m, ..., n$ des réels quelconques alors
$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$
et pour tout réel λ ,
$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

La deuxième propriété revient à dire que l'on peut toujours factoriser (ce qui revient à "sortir") tout ce qui ne dépend pas de de l'indice de sommation.
On peut alors généraliser, en combinant ces deux propriétés par l'égalité suivante :
pour tous réels λ et μ

$$\sum_{k=m}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Produit et $\sum$

Comment se passe la multiplication ?

Attention : en règle générale **la somme d'un produit n'est pas égale au produit de la somme !** Autrement dit, en général si n est un entier naturel et a_k, b_k, $k = 0, ..., n$ des nombres réels quelconques (notons que l'on prend k qui commence à 0 (par habitude), mais on pourrait le faire commencer pour n'importe quel m entier inférieur ou égal à n),

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Donnons un exemple pour montrer que ce n'est pas vrai tout le temps :
prenons $n \geq 1$ et $a_k = b_k = 1$ pour tout k. On aura alors d'un côté

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n}(1 \times 1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

et de l'autre

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Et pour tout entier $n \geq 1$, $n+1 \neq (n+1)^2$!
Bon, nous savons ce qui ne marche pas. Est-ce que l'on pourrait quand même trouver une formule qui pourrait marcher ?
Faisons un calcul simple et regardons ce que vaudrait

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Pour ça, nous allons développer un peu :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_n).$$

Nous pouvons alors utiliser la distributivité et nous obtenons

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = a_0(b_0 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_0 + \cdots + b_n).$$

En d'autres termes, nous faisons le produit de chaque a_k avec la somme des b_k et nous sommons le tout...maintenant il faut l'écrire en donnant des noms d'indices différents pour chaque somme (c'est la partie la plus délicate, il faut donc faire attention !) On l'écrit de la façon suivante

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = a_1\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) + \ldots + a_n\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Mais comme le dernier facteur $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ est indépendant de l'indice j on peut rentrer les a_j dans la somme sur les k et on obtient finalement

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j b_k.$$

De façon plus générale, nous avons la propriété suivante :

Propriété 3 (Produits et $\sum$)

Soient n et m deux entiers naturels et a_j, b_k, $j = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, m$ des nombres réels quelconques, alors

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k.$$

C'est ce que nous aurons de mieux comme résultat entre $\sum$ et produit.

1.2.6 Sommes télescopiques

Le télescopage a un peu à voir avec le télescope (qui par étymologie signifie “regarder loin”), mais pas sa fonction...plutôt l'instrument d'époque. En effet, le télescope pouvait à l'instar d'une longue-vue être composé de pièces s'emboîtant les unes dans les autres. C'est de cette image que l'on a tiré le verbe télescoper qui nous intéresse ici.
Il se peut en effet, que dans une somme donnée, certains termes puissent se rencontrer et s'annuler (ou disparaître comme les pièces du télescope). On dit alors que l'on a affaire à une somme télescopique (quand on prend cette somme dans l'autre sens, on peut d'ailleurs l'allonger comme la longue vue). D'où la propriété suivante

FIGURE 1.4 – François de Hadoque, capitaine de la marine du roi, commandant du vaisseau "La Licorne" avec une longue vue téléscopique. Apparaît dans : Le Secret de La Licorne (Le Secret de La Licorne - page 15 case B3) ©Hergé/Moulinsart.

Propriété 4 (Sommes téléscopiques)

Soient n et m deux entiers naturels avec $m \leq n$ et a_k, $k = m, ..., n$ des nombres réels quelconques, alors

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Preuve *la preuve est assez simple, il suffit de développer la somme :*

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) =$$
$$(a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+3} - a_{m+2}) + ... + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Nous voyons que des termes s'annulent entre eux (on dit qu'ils se télescopent)

$$\cancel{a_{m+1}} - a_m + \cancel{a_{m+2}} - \cancel{a_{m+3}} - \cancel{a_{m+2}} + ... + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_m.$$

Quelle est l'utilité de cette propriété ? Nous allons le voir tout de suite dans l'exemple suivant.

Exemple *Considérons la somme s_n, qui est un nombre réel dépendant de l'entier naturel n définie par*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Pour une raison quelconque, nous souhaitons évaluer s_{100}. On sent que ça risque d'être long... Mais pourquoi ne pas écrire cette somme par une formule dépendant de n en général

et ensuite remplacer n par 100. Comment allons-nous faire ?
La technique la plus simple va consister à remarquer (faire le calcul, c'est ce qu'on appelle une décomposition en éléments simples) que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pas de panique, la technique de décomposition s'apprend. Nous la verrons au prochain semestre. Mais tant que vous ne la connaitrez pas, on vous guidera pour la trouver.
Et donc, nous obtenons,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}).$$

Parfait ! Nous reconnaissons une somme télescopique. En le développant, nous voyons que tous les termes vont s'annuler, sauf le premier $\frac{1}{1} = 1$ et le dernier $\frac{1}{n+1}$. Il nous reste donc

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Et donc trouver par exemple s_{100} est un jeu d'enfant maintenant, nous savons tout de suite que ça fait $100/101$.

1.2.7 Quelques résultats classiques à connaître

a. Somme d'une suite arithmétique

La toute première, la plus connue est la suivante

Propriété 5 (Somme des entiers de 1 à n)

Pour tout n entier naturel, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est ce que nous appellerons la somme d'une suite arithmétique, que nous verrons...avec les suites.

Preuve *la preuve est assez simple, nous la verrons en cours. Mais pour notre culture, il y a une légende derrière cette preuve. La résolution de ce problème serait due à **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855, mathématicien allemand). Âgé de neuf ans, il aurait surpris son maître d'école Büttner qui avait donné comme calcul à sa classe la somme des entiers de 1 à 100,*

FIGURE 1.5 – Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) mathématicien, astronome et physicien allemand. Il est surnommé “le prince des mathématiciens”, l’un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

pensant être tranquille pendant un moment. ***Mais Gauss résolut le problème quasiment instantanément****. Comment ? Il additionna 1 avec 100, puis 2 avec 99, puis 3 avec 98 et ainsi de suite jusqu’à 50 avec 51. Un simple calcul montre qu’il obtint ainsi 50 fois la valeur 101, soit 5 050. Ne restait plus qu’à généraliser ce résultat à n’importe quel entier n.*
Pour la petite histoire voilà l’origine probable de cette légende due à ***Wolfgang Sartorius****.*
“Le jeune Gauss venait juste d’arriver dans cette classe quand Büttner donna en exercice la sommation d’une suite arithmétique. À peine avait-il donné l’énoncé que le jeune Gauss jeta son ardoise sur la table en disant « la voici ». Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, Büttner, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu’il devait toujours l’être, une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu’il ne pouvait y avoir d’autre réponse”.

Remarquons que si l’on commence la somme à partir de m plutôt que 1, nous avons la formule suivante

$$\sum_{k=m}^{n} k = m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (n-1) + n = (n-m+1)\frac{n+m}{2}$$

Continuons avec deux autres propriétés classiques que l’on ne vous demandera pas de retenir par cœur, mais au moins de savoir les démontrer (ce sont des exercices très classiques) :

1. **sommes des carrés de 1 à n : Pour tout n entier naturel, nous avons**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. **sommes des cubes de 1 à n : Pour tout n entier naturel, nous avons**

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Astuce pour se rappeler de la dernière propriété :

noter que la somme des cubes $\sum_{k=1}^{n} k^3$ est égale à au carré de la somme des k, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. Somme d'une suite géométrique

Parmi les sommes classiques, nous avons également la somme d'une suite géométrique. Le principe est simple :
considérons un nombre a réel quelconque et un entier naturel n non nul. Nous cherchons à calculer la somme des $n+1$ premières puissances de a. Autrement dit, nous cherchons à calculer

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n.$$

Plusieurs cas sont simples :

1. Si $a = 0$, la somme fera toujours 1 quelle que soit la valeur de n.
2. Si $a = 1$, nous sommons $n+1$ fois le nombre 1. Ce qui fait exactement $n+1$.

Regardons le cas général, pour $a \in \mathbb{R}$ **mais** $a \neq 1$. Dans cas, nous avons la propriété suivante

Propriété 6 (Somme de $n+1$ premières puissances de a)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq 1$, et pour tout n entier naturel, nous avons

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Nous voyons bien que pour ce résultat, nous avons besoin d'avoir $a \neq 1$, sinon ça ne marche pas. Par contre, nous avons vu juste au dessus qu'il y a quand même une formule pour $a = 1$.

1.2.8 Factorisation

Vous vous souvenez très certainement de la formule suivante, valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Vous serez sans doute amenés à factoriser $a^3 - b^3$ ou $a^4 - b^4$... Est-ce que nous pouvons avoir une formule générale ?
La réponse est oui. Dans la propriété suivante :

Propriété 7 (Factorisation)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et pour tout n entier naturel non nul, nous avons

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Nous pouvons remarquer que l'on peut trouver une formule de $a^n + b^n$ si n est impair, en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente.
Noter qu'il faut que n soit impair parce qu'alors $(-b)^n = -b^n$, mais si n est pair, nous avons $(-b)^n = b^n$, et il nous faut calculer $a^n + b^n$.
Nous avons alors 3 résultats intéressants (qu'il ne faut pas apprendre par cœur mais savoir retrouver à partir de la formule ci-dessus) :

1. **si n est impair, nous avons :**

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^k a^{n-1-k}b^{n-2} + a^k + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}b^k. \end{aligned}$$

2. **si nous prenons $b = 1$ nous avons**

$$a^n - 1 = a^n - 1^n = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

3. **Et si n est impair avec $b = -1$, nous avons**

$$a^n + 1 = a^n + 1^n = (a+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}.$$

1.3 Produits

Comme la somme, nous pouvons regarder ce qu'il se passe quand nous multiplions un nombre fini de termes.

1.3.1 Le symbole $\prod$

Comme nous prenions l'équivalent de la lettre S en grec pour la somme, nous utilisons l'équivalent du P en grec pour le produit, qui est $\prod$.

Notation 2 (Symbole $\prod$)

Soient m et n deux entiers naturels et a_k, $k = m, ..., n$ des nombres réels quelconques. Alors on pose

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m \times a_{m-1} \times ... \times a_{n-1} \times a_n, & \text{si } \ m \leq n, \\ 1, \ \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque

La notation $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$ s'écrit également $\prod\limits_{m \leq k \leq n} a_k$ et se lit "produit des a_k pour k allant de m à n.

Un des produits les plus utilisés est la factorielle. On la rencontre très souvent en mathématiques.

a. Factorielle

Définition 1 (Factorielle)

Soit n un entier naturel, nous notons $n!$ (qui se lit factorielle n) l'entier naturel

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod\limits_{k=1}^{n} k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit :

1. $0! = 1$ par convention,
2. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

b. Propriété des produits

De façon analogue à la somme, nous avons les propriétés sur le produit suivante

Propriété 8 (Propriétés des produits)

Soient m et n des entiers naturels, tels que $m \leq n$, nous avons

1. pour tout réel a,
$$\prod_{k=m}^{n} a = a.a.a...a = a^{n-m+1}.$$
2. pour tous réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout entier p tel que $m \leq p < n$, nous avons
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right)\left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right),$$
3. pour tous réels a_k et b_k, $k = m, ..., n$,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),$$
4. pour tous réels a_k et b_k, $k = m, ..., n$, tels que $b_k \neq 0$ pour tout k,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k / b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) / \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),$$
5. pour tous réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p,$$

Attention : pour tout réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k \neq \lambda \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right),$$

mais

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right),$$

c. Produits téléscopiques

Comme pour la somme, nous avons une propriété de télescopage pour le produit.

Propriété 9 (Produits téléscopiques)

Soient n et m deux entiers naturels avec $m \leq n$ et a_k, $k = m, ..., n$ des nombres réels quelconques **non nuls**, alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

d. Produits doubles

Il arrive quelques fois que nous ayons besoin de faire le produit sur des réels possédant deux indices. Comment notons nous cela ? Et surtout comment est-ce que nous pouvons calculer ? Si l'on considère n et m deux entiers naturels et $a_{i,j}$ des réels avec $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$, alors le produit de réels $a_{i,j}$ s'écrit

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}.$$

1. **Si $n = m$, nous notons plutôt**

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}.$$

2. **De façon générale, pour tous $a_{i,j}$ réels, avec $i, j = 1, ..., n$**

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

3. **si i et j sont dans un ordre précis au sens large (notez le $\leq$ entre i et j)**

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

4. **si i et j sont dans un ordre précis au sens strict (notez le $<$ entre i et j)**

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

1.3.2 Coefficients binomiaux

Une des applications les plus connues des factorielles (et donc des produits) est certainement une notion que vous avez déjà vue au lycée : les coefficients binomiaux. Quand on aborde les probabilités, ils représentent le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (où k et n sont des entiers tels que $k \leq n$). Nous allons rappeler leur définition ainsi que quelques propriétés

Définition 2 (Coefficients binomiaux)

Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$, nous notons $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ l'entier naturel défini par

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Interprétation :

- quand on doit choisir k éléments parmi n et que l'ordre est important, nous avons n possibilités de choisir le premier, puis $n-1$ pour le second, etc. jusqu'à $n-k+1$ pour le $k$ème. Ce qui nous donne

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Mais quand on ne tient pas compte de l'ordre, il y a beaucoup moins de possibilités. Par exemple, pour le Loto, tirer les boules 15, 4 ou 33, revient à la même chose que tirer 33, 4 puis 15. Et donc il faut évaluer toutes les combinaisons qui comportent les mêmes nombres. Ceci revient à compter le nombre de permutations de k nombres (ou pour le loto, les permutations de k boules).
Et comme le nombre de permutations de k nombres est $k!$, on divise la formule précédente par k. Ce qui nous donne

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ce qui est exactement la formule des coefficients binomiaux.

Propriété 10 (Propriétés des coefficients binomiaux)

Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$, nous avons les 3 propriétés suivantes

1. **Symétrie :** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$,
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n}{k}\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$,
3. **Formule de Pascal :** $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$.

Remarques 1.2

1. ***Ces résultats ne sont pas à retenir par cœur, mais il faut savoir les démontrer,***
2. ***La propriété 3, connue sous le nom de formule de Pascal, peut se traduire sous forme de tableau que l'on appelle communément triangle de Pascal.***

Et ceci nous amène tout naturellement à la **formule du binôme de Newton** suivante.

Propriété 11 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}.$$

Remarques 1.3

1. ***Cette formule du binôme de Newton est par contre à connaître par cœur !***
2. ***Attention : ne pas confondre cette formule du binôme, avec celle que nous avons plus haut qui est $a^n - b^n$ donnée dans la propriété 7 qui concernait la factorisation ! Ici, nous ne cherchons pas à factoriser mais à développer.***

Si a et b sont remplacés par des valeurs particulières nous avons les résultats suivants :

1. $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (1+1)^n = 2^n$,
3. $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k = (1-1)^k = 0$.

1.4 Égalités et inégalités dans $\mathbb{R}$

La dernière section de ce chapitre est indépendante des deux précédentes sections sur la somme et le produit. Elle se place toutefois dans la continuité de ce que vous avez appris au lycée. Les résultats présentés ici serviront également dans les chapitres suivants, il est donc très important de les connaître et savoir les manipuler.

1.4.1 Égalités

Définition 3 (Égalité)

On appelle identité une égalité entre deux expressions qui est valable quelles que soient les valeurs des variables entrant en jeu dans ces expressions.
Les expressions situées de part et d'autre du signe "=" sont appelées les membres de l'égalité.

1.4.2 Inégalités

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Comme pour les égalités, les expressions situées de part et d'autre du signe $\geq$, $\leq$, $>$ ou $<$ sont appelés les membres de l'inégalité.

Rappelons d'abord quelques règles de comparaison. C'est important de les exprimer ici, même si elles ont l'air simples. Elles permettront de résoudre un grand nombre de problèmes. Il est également sage de rappeler que ces règles sont valables pour les nombres réels, mais pas pour les nombres complexes. Commençons par la relation d'ordre.

Propriété 12 (Relation d'ordre)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. On a alors les règles de comparaison suivantes :

1. **Réflexivité** : quel que soit le nombre réel a,
$$a \leq a,$$
2. **Antisymétrie** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \quad \text{alors} \quad a = b,$$
3. **Transitivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \quad \text{alors} \quad a \leq c,$$
4. **Ordre total** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{on a} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a.$$

Remarques 1.4

1. ***Les règles 1, 2 et 3 de la propriété précédente expriment que $\leq$ est une relation d'ordre, et la propriété 4 que cette relation est totale.***
2. ***A partir de la relation "inférieur ou égal" $\leq$ définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique "supérieur ou égal" $\geq$ pour tous réels a et b par :***
$$a \geq b \quad \textit{si et seulement si} \quad b \leq a.$$
3. ***On définit également la relation"strictement inférieur" pour tous réels a et b par :***
$$a < b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \leq b \textit{ et } a \neq b,$$
et la relation "strictement supérieur" pour tous réels a et b par :
$$a > b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \geq b \textit{ et } a \neq b,$$
4. ***D'un point de vue de logique, la négation de $a \leq b$ est $a > b$.***

Attention : ne pas confondre les inégalités larges et strictes.
En effet, si $a < b$ alors $a \leq b$ **mais la réciproque est fausse !**
On ne passera donc jamais d'une inégalité large vers une inégalité stricte sans une bonne justification.
On aborde ensuite les règles dites de compatibilité que la plupart d'entre vous connaissez depuis le collège.

Propriété 13 (Règles de compatibilité)

Soient a, b, c et $d \in \mathbb{R}$. On a alors les **règles de compatibilité** suivantes :

1. si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
2. si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$.

Remarques 1.5

1. ***La règle 2 de la propriété précédente peut également s'écrire avec la relation "stricte", en utilisant le résultat suivant :***

   $$\textbf{\textit{si}} \quad ab = 0 \quad \textbf{\textit{alors}} \quad a = 0 \textbf{\textit{ ou }} b = 0 \textbf{\textit{ (ou les deux).}}$$

   On a alors la règle suivante :

   $$\textbf{\textit{si }} a < b \textbf{\textit{ et }} 0 < c \quad \textbf{\textit{alors}} \quad ac < bc.$$

2. ***De la propriété précédente on déduit***

   (a) ***si*** $a \leq b$ ***et*** $c \leq d$ ***alors*** $a + c \leq b + d$,

   (b) ***si*** $0 \leq a \leq b$ ***et*** $0 \leq c \leq d$ ***alors*** $ac \leq bd$.

Définition 4 (Opposé et inverse)

1. Deux nombres réels a et b sont **opposés** si $a + b = 0$.
2. Deux nombres réels a et b non nuls sont dits **inverses** l'un de l'autre si $ab = 1$.

Propriété 14 (Règles de l'opposé et de l'inverse)

1. Soit a un réel quelconque, alors il existe un unique réel b tel que $a+b=0$.
   On note $b=-a$.
2. Soit a un réel **non nul**, il existe un unique réel **non nul** c tel que $ac=1$.
   On note $c=\dfrac{1}{a}$ ou encore a^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, alors

$$a \leq b \text{ est équivalent à } -a \geq -b,$$

4. Soient a et b deux réels non nuls et de même signe, alors

$$a \leq b \text{ est équivalent à } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Attention : on **ne soustrait pas des inégalités membre à membre !** C'est à dire que pour a, b, c, d réels

$$\text{si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ on n'a pas } a-c \leq b-d\,!$$

Il faut d'abord passer par l'opposé pour la deuxième inégalité, puis additionner membre à membre.
De même, **on ne divise pas les inégalités membres à membres !** C'est à dire que pour tous a, b, c et d réels, avec c et d non nuls,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ on n'a pas } \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}\,!$$

Il faut d'abord passer par l'inverse dans la deuxième inégalité puis multiplier (ça ne changera pas l'ordre si le tous les membres sont positifs...sinon il faut faire attention).

Remarques 1.6

1. ***L'opposé de a noté $-a$ n'est pas nécessairement négatif ! L'opposé de $a=-5$ par exemple est $-a=5$! C'est une erreur que l'on rencontre souvent.***
2. ***On rappelle encore une fois ici que l'on ne peut pas diviser par 0 ! Ainsi, lorsque l'on écrira un dénominateur, il faudra toujours s'assurer que ce dernier est non nul.***
3. ***Toutes les propriétés et règles précédentes nous permettent de dire que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale (comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels). On représente cet ensemble $\mathbb{R}$ par une droite en général, et comme on l'a spécifié dans le préambule, cette droite ne possède pas de trou (on dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet) contrairement à la représentation de l'ensemble $\mathbb{Q}$.***

Méthode : pour déterminer le signe d'une expression, il vaut mieux essayer de factoriser l'expression quand c'est possible. Il est en effet toujours plus facile de déterminer le signe d'un produit (par tableau de signes) que le signe d'une somme.

1.4.3 Valeur absolue

Rappelons ici quelques propriétés des valeurs absolues que vous êtes censés maîtriser depuis le lycée. Commençons par en donner la définition qui est due à **François Viète** en 1591.

FIGURE 1.6 – François Viète (1540-1603), mathématicien français, il est le premier à noter les paramètres d'une équation par des symboles et se trouve donc le fondateur de l'algèbre nouvelle ou “logistique spécieuse”.

Définition 5 (Valeur absolue)

Soit a un nombre réel. La **valeur absolue** de a est le nombre réel défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Propriété 15 (Valeur absolue, rappels)

Pour tous nombres réels a et b, nous avons :

1. $|a| \geq 0$, $-|a| \leq a \leq |a|$, $|-a| = |a|$,
2. $\sqrt{a^2} = |a|$,
3. $|ab| = |a||b|$,
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$ si on a en plus $a \in \mathbb{R}^*$) , $|x|^n = |x^n|$,
5. si $a \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$ et de façon générale $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|}$,
6. si $b \geq 0$, $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$,
7. si $b \geq 0$, $|a| \geq b$ si et seulement si $a \leq -b$ ou $a \geq b$,
8. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire**),
9. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire inversée**).

Une autre propriété que l'on utilisera très souvent en TD.

Propriété 16 (Valeur absolue et distance)

Soit r un réel strictement positif. Pour tous nombres a et b nous avons les deux équivalences suivantes :

1. $|b-a| = r$ si et seulement $b = a - r$ ou $b = a + r$,
2. $|b-a| < r$ si et seulement $a - r < b < a + r$,
3. $|b-a| \leq r$ si et seulement $a - r \leq b \leq a + r$,
4. $|b-a| > r$ si et seulement $b < a - r$ ou $b > a + r$,
5. $|b-a| \geq r$ si et seulement $b \leq a - r$ ou $b \geq a + r$.

Définition 6 (Partie positive, partie négative)

Soit $a \in \mathbb{R}$,

1. On appelle partie positive de a, le réel $a^+ = \max(a, 0) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ 0 & \text{si } a < 0. \end{cases}$
2. On appelle partie négative de a, le réel $a^- = \max(-a, 0) = \begin{cases} -a & \text{si } a \leq 0, \\ 0 & \text{si } a > 0. \end{cases}$

On a alors $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.

1.4.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs types d'intervalles. Tout est assez intuitif, nous garderons cette forme d'intuition dans les définitions sans aller dans les détails.
Voici tout d'abord la définition générale d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 7 (Intervalle de $\mathbb{R}$)

On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie de I de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } x \leq z \leq y \quad \text{alors} \quad z \text{ appartient à } I.$$

Remarques 1.7

1. ***Le fait de considérer une partie I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$).***
2. ***Le fait de considérer un élément a de I se note $a \in I$ (qui se lit a appartient à I).***
   Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour des parties, et $\in$ qui est utilisé pour des éléments.
3. ***La définition précédente pourrait alors s'écrire :***
   on appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, $y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\textit{si } x \leq z \leq y \quad \textit{alors} \quad z \in I.$$

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous allons les résumer dans les définitions suivantes.

Définition 8 (Intervalle fermé et borné (segment))

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé et borné (appelé aussi segment) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Définition 9 (Intervalle ouvert)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

ou

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\},$$

ou

$$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}.$$

ou

$$\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[.$$

Dans le premier cas, on dit que l'intervelle est borné.

Définition 10 (Intervalle ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Définition 11 (Intervalle semi-ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

mais aussi

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}.$$

Définition 12 (Intervalle fermé et non borné)

Soient a et b deux réels . Par convention on appelle intervalle fermé et non borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\},$$

mais aussi

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

Notation 1.1
On notera les intervalles particuliers suivants :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0], \quad \textit{et} \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[.$$

La notation $\mathbb{R}^*$ *désignant l'ensemble* $\mathbb{R}$ *privé de* 0.

Remarque

1. ***L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide (eh oui ! Il faut le considérer celui-ci aussi...), et il est noté*** $\emptyset$.

2. ***L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton (en anglais "single" veut dire seul). On le note alors entre accolade (est-ce que c'est parce qu'il est seul qu'il a besoin d'accolades pour être réconforté...) ; Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$.***
3. ***Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a, a]$ et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé.***
4. ***L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme l'intervalle $]a, a[$ donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbb{R}$ alors comme un intervalle fermé.***
   Mais, $\mathbb{R}$ peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit $]-\infty, +\infty[$.
   Et donc son complémentaire $\varnothing$ sera considéré comme fermé.
   C'est la raison pour laquelle $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Intervalles de $\mathbb{R}$	**Bornés**	**Non Bornés**
Ouverts	$]a, b[;\ \varnothing$	$\mathbb{R};\ ]-\infty, a[;\ ]a, +\infty[$
Fermés	$[a, b];\ \{a\};\ \varnothing$	$\mathbb{R};\ ]-\infty, a];\ [a, +\infty[$
Semi-ouverts	$[a, b[;\ ]a, b]$	

FIGURE 1.7 – Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Remarque
Nous pourrons utiliser quelquefois la notion de paramétrage du segment. Autrement dit, en essayant d'interpréter, nous laisserons un point se balader entre les bornes de l'intervalle suivant un "temps" t compris entre 0 et 1.
Pour être plus clair, on aura l'équivalence suivante :

$$x \in [a, b] \text{ si et seulement s'il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = (1 - t)a + bt.$$

Cette équivalence permet de dire que tout point du segment $[a, b]$ peut être identifié grâce à un paramètre t compris entre 0 et 1. Pour aller plus loin, nous pourrions dire que tout point de se segment peut être identifié comme un certain barycentre des extrémités.
Cela pourra nous servir quand on verra (en cours, ou TD) la notion de convexité.

1.4.5 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Voyons maintenant comment on pourrait construire l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ (ce n'est pas l'unique façon de construire $\mathbb{R}$ mais pour l'instant c'est la seule que l'on puisse aborder dans l'état de nos connaissances).
Pour cela nous avons besoin des notions de borne supérieures et inférieures, pour les utiliser, nous devons auparavant définir les notions de majorant et minorant.

Définition 13 (Majorant, minorant)

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est majorée s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique) est appelé majorant de E.
2. E est minorée s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \geq m$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique) est appelé minorant de E.
3. E est bornée si E est majorée et minorée.

Remarque ***Attention : comme on l'a noté,*** M ***et*** m ***n'appartiennent pas nécessairement à*** E***...c'est la toute la nuance entre les notions qui suivent : la borne supérieure et le maximum, la borne inférieure et le minimum.***

Définition 14 (Borne supérieure, Borne inférieure)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un **majorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \geq m$,
2. si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.

Si on demande de plus que M et m appartiennent à l'ensemble E, on les appelle **maximum** et **minimum**. C'est la toute la différence avec les bornes supérieures et bornes inférieures. **Donc ne confondez pas ces notions !**

Définition 15 (Maximum, minimum)

Soit $E \subset \mathbb{R}$.
On dit que M est le **maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est le **minimum** de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

1.4.6 Hors programme : pour aller plus loin

Cette section n'est pas au programme, vous pourrez toutefois la lire, elle vous servira pour les semestres suivants.

a. Caractérisation des bornes sup et inf

On peut caractériser de façon pratique (ce qui pourrait servir pour certains exercices) la borne $\sup$ et la borne $\inf$ de la façon suivante.

Proposition 1 (Caractérisation des bornes $\sup$ et $\inf$.)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. si la partie E est majorée par un réel M. Alors

$$M = \sup(E) \text{ si et seulement si pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe } x \in E \text{ tel que } x \in]M - \varepsilon, M].$$

2. si la partie E est minorée par un réel m. Alors

$$m = \inf(E) \text{ si et seulement si pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe } x \in E \text{ tel que } x \in [m, m + \varepsilon[.$$

b. Construction de l'ensemble $\mathbb{R}$

On peut maintenant décrire une façon de construire $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute "toutes les bornes sup de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$".
On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 17 (Propriété de la borne sup)

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.

Propriété 18 (Réel et borne sup)

Tout réel est la borne sup d'un ensemble d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Remarque

1. *La première propriété est due à Bernhard Bolzano en 1817.*

2. ***$\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne sup : $\{x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 < 2\}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne sup dans $\mathbb{R}$ et n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$.***

Voilà, nous avons maintenant quelques outils essentiels pour continuer le cours d'analyse. Bien entendu, ce chapitre est bien loin de couvrir toutes les connaissances accumulées sur ces ensembles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)...mais faute de temps, nous en resterons là. Les plus curieux pourront à loisir se renseigner plus dans ce domaine, un peu en cours d'algèbre, mais également dans la littérature très riche à ce sujet.

L'essentiel de ce chapitre

1 - □ $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_{n-1} + a_n$ pour $m \leq n$ contient $n - m + 1$ éléments.
2 - □ Savoir utiliser les coefficients binomiaux.
3 - □ Savoir utiliser les égalités, inégalités et valeurs absolues.

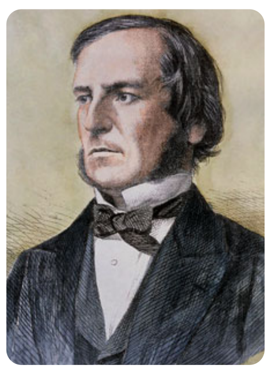
Chapitre 2

Bases de logique

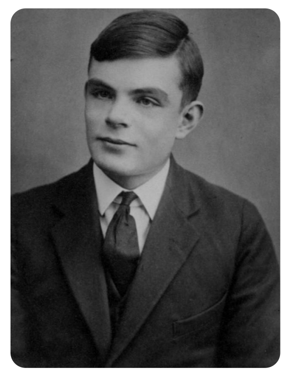
La logique est l'hygiène des mathématiques

André Weil

(a) Auguste De Morgan (1806 - 1871) mathématicien et logicien britannique, il a fondé avec Boole la logique moderne. On le connait surtout pour les lois qui portent son nom.



(b) George Boole (1815- 1864) mathématicien britannique, créateur avec De Morgan de la logique moderne fondée sur une structure algébrique et sémantique, que l'on appelle aujourd'hui algèbre de Boole.



(c) Alan Mathison Turing (1912 - 1954), un mathématicien britannique, un des fondateurs de l'informatique.

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la logique.

Sommaire

2.1 Origines de la logique

L'objectif ici est de bien définir le vocabulaire, les notations et les propriétés que nous utiliserons non seulement dans ce chapitre, mais également dans toutes les preuves de résultats que nous développerons que ce soit en cours ou en travaux dirigés. A partir de ce chapitre, il faudra donc construire les démonstrations de la façon la plus rigoureuse possible, en utilisant les bons quantificateurs, dans le bon ordre, mais également des stratégies de preuves (absurde, contraposée, récurrence par exemple).

2.2 Assertions et prédicats

Définition 1 (Assertion)

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité

vrai (V) ou Faux (F),

mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du **tiers-exclu**.

Exemple

1. *L'énoncé "Paris est la capitale de la France", est **vrai (V)**.*
2. *L'énoncé "24 est un multiple de 2", est **vrai (V)**.*
3. *L'énoncé "19 est un multiple de 2", est **faux (F)**.*

Définition 2 (Prédicat)

Un **prédicat** est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées "variables" tel que, quand on replace chacune des lettres par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Exemple

1. *L'énoncé : $P(n) =$"n n'est pas un multiple de 2", est un **prédicat**, car il devient une **assertion** quand on donne une valeur à n. Par exemple,*
   - $P(10)$="10 est un multiple de 2" est une assertion vraie.
   - $P(11)$="11 est un multiple de 2" est une assertion fausse.

2. *L'énoncé $P(x, A)$="$x \in A$", est un **prédicat** à deux variables. Il devient une **assertion** quand on donne une valeur aux deux variables. Par exemple,*
   -$P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie,
   -$P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une assertion fausse.

2.3 Les connecteurs logiques

Définition 3 (Négation d'un prédicat)

Soit P un prédicat, la négation d'un prédicat P est le prédicat non (P), qui est
- faux lorsque P est vrai,
-vrai lorsque P est faux.

On résume en général ceci dans une table de vérité (figure 2.2), comme suit

Exemple

1. *Premier exemple :*
   - P="24 est un multiple de 2" est une assertion vraie V,
   - non (P)="24 n'est pas un multiple de 2" est une assertion fausse F.
2. *A partir du prédicat "$x \in A$", nous pouvons définir le prédicat non ($x \in A$)="$x \notin A$".*

P	non P
V	F
F	V

FIGURE 2.2 – Table de vérité pour non (P)

Définition 4 (Conjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat “P et Q” est appelé **conjonction** de P et Q. C’est un prédicat qui est :
-vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,
-faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité (figure 2.3) :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

FIGURE 2.3 – Table de vérité pour la conjonction

Notation 2.1 *Nous écrivons parfois $P \wedge Q$ pour “P et Q”.*

Exemple

1. *Soient P le prédicat “$x \in [0,4]$” et Q le prédicat “$x \in [2,8]$”, le prédicat $P \wedge Q$ est “$x \in [2,4]$”.*
2. *Soient P le prédicat “$x \in A$” et Q le prédicat “$x \in B$”, le prédicat $P \wedge Q$ est “$x \in A \cap B$”.*

Définition 5 (Disjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P ou Q" est appelé **disjonction** de P et Q. C'est un prédicat qui est :
-vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats est vrai,
-faux lorsque les deux prédicats sont faux simultanément.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité (figure 2.4) :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

FIGURE 2.4 – Table de vérité pour la disjonction

Notation 2.2 *Nous écrivons parfois $P \vee Q$ pour "P ou Q".*

Exemple

1. *Soient P le prédicat "$x \in [0,4]$" et Q le prédicat "$x \in [2,8]$", le prédicat $P \vee Q$ est "$x \in [0,8]$".*
2. *Soient P le prédicat "$x \in A$" et Q le prédicat "$x \in B$", le prédicat $P \wedge Q$ est "$x \in A \bigcup B$".*

Définition 6 (Implication)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Rightarrow Q$" est appelé **implication** de P et Q. C'est un prédicat qui est :
-faux lorsque P est vrai et Q est faux,
-vrai dans tous les autres cas.

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

FIGURE 2.5 – Table de vérité pour l'implication

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité (figure 2.5) :

Remarques 2.1

1. *Nous disons que P est une condition suffisante pour Q.*
2. *$Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.*
3. *si P est faux et Q est vrai, le prédicat $P \Rightarrow Q$ peut paraître curieux.*

Définition 7 (Équivalence)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Leftrightarrow Q$" est appelé **équivalence** de P et Q. C'est un prédicat qui est :
-vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,
-faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité (figure 2.6) :

Remarques 2.2

1. *$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ se note $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$,*
2. *$(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$ se note $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$.*

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

FIGURE 2.6 – Table de vérité pour l'équivalence

2.4 Propriétés

Définition 8 (Équivalence logique)

Soient P_1 et P_2 deux prédicats.Si
- P_1 est vrai lorsque P_2 est vrai,
- P_2 est faux lorsque P_2 est faux,
on dit que P_1 et P_2 ont la même table de vérité, ou qu'ils sont logiquement équivalents, et on note

$$P_1 \equiv P_2.$$

Dans le cas contraire, on note

$$P_1 \not\equiv P_2$$

Exemple

1. *Soit P un prédicat, non(non(P)) $\equiv P$.*
2. *Soient P et Q deux prédicats, $(P$ et $(P \;\; ou \;\; Q)) \equiv P$.*

Considérons maintenant un prédicat P, qui peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux. Considérons ensuite le prédicat composé

$$R = \text{“}P \text{ ou non}(P)\text{”}.$$

Ce prédicat est toujours vrai indépendamment du choix de P. En effet, avec la table de vérité (figure 2.7), nous avons, Ce prédicat R est appelé **tautologie**.

P	non (P)	P ou non(P)
V	F	V
F	V	V

FIGURE 2.7 – Table de vérité pour une tautologie

Définition 9 (Tautologie)

Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité qui le composent, est appelé une **tautologie**.

Proposition 1 (Lois de De Morgan)

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$\begin{aligned} \text{non } (P \ \text{ ou } \ Q) &\equiv (\text{non } P \ \text{ et } \ \text{non } Q) \\ \text{non } (P \ \text{ et } \ Q) &\equiv (\text{non } P \ \text{ ou } \ \text{non } Q) \end{aligned}$$

Ce sont les **lois de De Morgan** pour les prédicats.

Proposition 2 (Équivalences logiques avec trois prédicats)

Soient P, Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$\begin{aligned} (P \ \text{ ou } \ (Q \ \text{ et } \ R) &\equiv (P \ \text{ ou } \ Q) \ \text{ et } \ (P \ \text{ ou } \ R) \\ (P \ \text{ et } \ (Q \ \text{ ou } \ R) &\equiv (P \ \text{ et } \ Q) \ \text{ ou } \ (P \ \text{ et } \ R) \end{aligned}$$

Proposition 3 (Équivalences logiques avec trois prédicats (2))

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$P \Rightarrow Q \equiv (\text{non P} \quad \text{ou} \quad Q),$$

nous disons que Q est une **condition nécessaire** pour P.

$$\begin{array}{lll} \text{non}(P \Rightarrow Q) & \equiv & (P \ \text{ et } \ \text{non } Q) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & \text{non}(P) \Rightarrow \text{non}Q) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & ((P \Rightarrow Q) \ \text{ et } \ (Q \Rightarrow P)) \end{array}$$

Notons que $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}Q)$ est la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

2.5 Quantificateurs mathématiques

A partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, nous construisons de nouvelles assertions, que l'on appelle assertions quantifiées, en utilisant les quantificateurs "quel que soit" et "il existe".

Définition 10 (Quantificateur $\forall$)

Le quantificateur "quel que soit" noté $\forall$ permet de définir l'assertion quantifiée

$$\text{“}\forall x \in E, \quad P(x)\text{,”}$$

qui est vraie pour tous les éléments x appartenant à E, le prédicat $P(x)$ est vraie.

Exemple

1. "$\forall x \in [-3,1], \quad x^2 + 2x - 3 \leq 0$" *est vraie,*
2. "$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n-3)n \geq 0$" *est fausse,*
3. "$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n^2$ *pair* $\Rightarrow n$ *pair) est vraie.*

Définition 11 (Quantificateur $\exists$)

Le quantificateur "il existe" noté $\exists$ permet de définir l'assertion quantifiée

$$\text{“}\exists\, x \in E, \quad P(x)\text{,”}$$

qui est vraie si l'on peut trouver au moins un élément x appartenant à E, tel que le prédicat $P(x)$ soit vraie.

Remarque *S'il existe un et un seul élément, on peut écrire*

$$\exists !\ x \in E, \quad P(x).$$

Nous dirons alors qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple

1. *L'assertion quantifiée "$\exists\ x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4$" est vraie.*
2. *L'assertion quantifiée "$\exists !\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = 1$" est vraie.*

Remarque *Notons que si "$\forall\ x \in E,\ P(x)$" est vraie, alors "$\exists\ x \in E,\ P(x)$" est vraie.*

Attention :
il faudra manipuler avec précaution les assertions de la forme "$\exists\ !\ x \in E, \quad P(x)$" pour lesquelles la notation $\exists$! n'est pas un quantificateur bien qu'il en ait l'air !
En effet, si nous posons

$$R_1 = \text{“}\exists\ x \in E,\ P(x)\text{” (c'est l'existence)}$$

et

$$R_2 = \text{“}\forall\ x \in E,\ \forall\ x' \in E,\ ((P(x) \ \text{ et } \ P(x')) \Rightarrow (x = x'))\text{” (c'est l'unicité),}$$

nous avons alors

$$(\exists\ !x \in E, P(x)) \equiv (R_1 \ \text{ et } \ R_2).$$

Proposition 4 (Équivalences logiques et quantificateurs)

Soit $P(x)$, un prédicat, nous avons les équivalences topologiques suivantes :

$$\begin{aligned} \text{non}(\forall\ x \in E,\ P(x)) &\equiv (\exists\ x \in E,\ \text{non}(P(x))) \\ \text{non}(\exists\ x \in E,\ P(x)) &\equiv (\forall\ x \in E,\ \text{non}(P(x))) \end{aligned}$$

Exemple *Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats sur E. Nous avons,*

$$\begin{aligned} \textit{non}(\forall\ x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\equiv (\exists\ x \in E,\ (P(x) \ \textit{ et } \ \textit{non}(Q(x))) \\ \textit{non}(\exists\ !\ x \in E,\ P(x)) &\equiv (\textit{non}(R_1) \ \textit{ ou } \ \textit{non}(R_2)) \end{aligned}$$

Définition 12 (Prédicats à deux variables)

Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables, $x \in E$ et $y \in F$.
L'assertion quantifiée

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ \ P(x, y),$$

est vraie lorsque tous les éléments de $x \in E$ et tous les éléments $y \in F$, vérifient $P(x, y)$.
L'assertion quantifiée

$$\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ \ P(x, y),$$

est vraie lorsqu'il existe au moins un élément $x \in E$ et qu'il existe au moins un élément $y \in F$ qui vérifient $P(x, y)$.

Remarque
Nous pouvons combiner des quantificateurs de natures différentes. Mais attention, il faut respecter les règles suivantes :

$$\begin{array}{rcl}(\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ \ P(x, y)) & \equiv & (\forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ \ P(x, y)),\\ (\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ \ P(x, y)) & \equiv & (\exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ \ P(x, y)).\end{array}$$

Attention :
il ne faut pas permuter des quantificateurs différents !

$$(\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ \ P(x, y)) \ \ \not\equiv\ \ (\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ \ P(x, y)).$$

2.6 Différents modes de démonstration

2.6.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire

Pour montrer qu'un énoncé Q est vrai, nous nous appuyions sur la tautologie suivante

$$(P \ \text{ et } \ (P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad Q.$$

C'est bien une tautologie, comme le montre la table de vérité de la figure 2.8

1. Nous montrons que P est vrai (en pratique il s'agit d'un énoncé évident),
2. puis nous montrons que $P \Rightarrow Q$ est vrai,
3. nous nous retrouvons sur la première ligne de la table de vérité 2.8, ce qui montre que Q est vrai.

P	Q	P ⇒ Q	P et (P ⇒ Q)	(P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

FIGURE 2.8 – Table de vérité pour la tautologie (P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q

2.6.2 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé P est vrai, nous nous appuyons sur l'équivalence logique

$$((\text{non}(P) \Rightarrow Q) \ \text{ et } \ (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))) \quad \equiv \quad P.$$

Vérifions cela dans la table de vérité (figure 2.9) Il paraît clair que la première et la dernière

P	Q	non(P)	non(Q)	non(P) ⇒ Q	non(P) ⇒ non(Q)	(non(P) ⇒ Q) et (non(P) ⇒ non(Q))
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

FIGURE 2.9 – Table de vérité pour la tautologie (non(P) ⇒ Q) et (non(P) ⇒ non(Q))

colonne sont identiques. Nous supposons alors que non(P) est vrai (lignes 3 et 4 de la figure 2.9), et nous cherchons alors Q, qui sous cette hypothèse serait à la fois vrai ou faux. Nous disons alors que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Remarque *Dans la pratique, nous montrons que si non$P$ est vrai alors on aboutit à une contradiction et on en déduit que P est vrai.*

2.6.3 Raisonnement par contraposée

Il faut montrer des résultats faisant apparaître une implication $P \Rightarrow Q$. Ce raisonnement s'appuie sur l'équivalence logique

$$(P \Rightarrow Q) \quad \equiv \quad (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

Pour montrer qu'un énoncé Q est vrai, nous utilisons l'équivalence logique ci-dessus.

2.6.4 Raisonnement par contre exemple

Ce raisonnement sert à montrer qu'un énoncé de la forme $\forall\ x \in E, \quad P(x)$ est faux. Pour cela, nous montrons que sa négation est vraie. Autrement dit

$$\text{non}(\forall\ x \in E,\ \ P(x)) \ \ \equiv\ \ (\exists\ x \in E,\ \text{non}(P(x))).$$

Pour cela nous montrons qu'il existe un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exemple

1. *Montrons que*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \forall\ \varepsilon > 0,\ \ (|x|) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x = 0).$$

   est faux. La négation de cet énoncé est

$$\exists\ x \in \mathbb{R},\ \ \exists\ \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \quad \textit{et} \quad x \neq 0).$$

   Nous rappelons en effet que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P et non(Q).
   Si $x = 1$ et $\varepsilon = 2$, nous avons $|x| < \varepsilon$ et $x \neq 0$, la négation de l'énoncé est vraie, donc l'énoncé est faux.

2. *Attention, il ne faut pas confondre*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \forall\ \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x = 0).$$

   avec

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ ((\forall\ \varepsilon > 0,\ \ |x| < \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad x = 0).$$

2.6.5 Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement sert à montrer qu'un énoncé du genre

"pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$" est vrai.

Il y a deux méthodes pour le prouver.

1. La récurrence classique :
   (a) Nous vérifions que l'assertion $P(n_0)$ est vraie.
   (b) Supposons que $P(k)$ soit vraie pour un certain $k \geq n_0$. Il faut montrer $P(k+1)$ soit vraie.
2. La récurrence forte :
   (a) Nous vérifions que l'assertion $P(n_0)$ est vraie.
   (b) Si l'implication $\forall\ n \geq n_0, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie , alors l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

2.7 Ensembles

2.7.1 Définition

Définition 13 (Ensemble)

De façon informelle, un ensemble est une collection d'éléments.

Exemple $\{0, 1\}$, $\{$ *chien, chat* $\}$, $\{0, 1, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}$ *sont des ensembles*

Une autre façon de définir les ensembles :

Définition 14 (Ensembles 2)

Un ensemble est une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

Exemple $\{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C}, z^5 = 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ *sont des ensembles.*

Notation 1 (Appartenance)

Soit E un ensemble. Nous notons :

1. $x \in E$, si x appartient à un ensemble E.
2. $x \notin E$, si x n'appartient pas à un ensemble E.

2.7.2 Ensembles particulier

Définition 15 (Ensemble vide)

L'ensemble vide noté, $\varnothing$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 16 (Singleton)

L'ensemble ne contenant qu'un élément, noté $\{a\}$ est appelé singleton.

Définition 17 (Paire)

L'ensemble contenant deux éléments, noté $\{a, b\}$ est appelé paire.

2.7.3 Inclusion, union, intersection, complémentaire

Soient E et F deux ensembles

Définition 18 (Inclusion)

Nous notons $E \subset F$ l'inclusion de l'ensemble E dans l'ensemble F. Autrement dit, tout élément de E est également élément de F, ou encore :

$$\forall\, x \in E,\ x \in F.$$

Nous disons que E est un sous ensemble de F.

Définition 19 (Égalité)

Deux ensembles E et F sont égaux, et nous notons : $E = F$, si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 20 (Ensemble de parties)

L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple *Si* $E = \{1, 2, 3\}$ *alors* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Définition 21 (Complémentaire)

Soit $A \subset E$. Le complémentaire du sous-ensemble A dans E, noté $\complement_E A$ ou $E \backslash A$ est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A, ou encore

$$\complement_E A = \{x \in E, x \notin A\}.$$

Définition 22 (Union)

Soient $A, B \subset E$. L'union des deux sous-ensembles A et B de E, noté, $A \cup B$ est l'ensemble des points appartenant soit à A soit à B.

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}.$$

Définition 23 (Intersection)

Soient $A, B \subset E$. L'intersection des deux sous-ensembles A et B de E, noté, $A \cap B$ est l'ensemble des points appartenant à la fois à A et à B.

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}.$$

Remarque *Lorsque $A \cap B = \varnothing$, nous disons que les ensembles A et B sont disjoints.*

2.7.4 Règles de calculs

Proposition 5 (Propriétés sur l'intersection)

Soient $A, B, C \subset E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cap B = B \cap A$,
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$,
4. $A \cap A = A$,
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Proposition 6 (Propriétés sur l'union)

Soient $A, B, C \subset E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
3. $A \cup \varnothing = A$,
4. $A \cup A = A$,
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Proposition 7 (Propriétés sur l'union et intersection)

Soient $A, B, C \subset E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition 8 (Propriétés sur le complémentaire)

Soient $A, B \subset E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\complement_E(\complement_E A)) = A$,
2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$,
3. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$,
4. $A \subset B \Leftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

2.7.5 Produit cartésien

Définition 24 (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. Nous le notons :

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}.$$

Chapitre 3

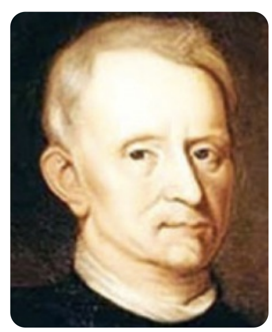
Nombres complexes

D'impossibles à imaginaires, d'imaginaires à complexes. Combien d'idées, de systèmes politiques, de théories, de procédés ont suivi ce chemin pour devenir "réalité" !

Denis Guedj

(a) Girolamo Cardano (Jérôme Cardan) (1501 - 1576), mathématicien italien, à l'origine de la méthode pour trouver les solutions de certaines équations de troisième degré (accusé toutefois de plagiat par Niccolo Fontana Tartaglia).

(b) Raphaël Bombelli (1526-1572), mathématicien italien, il fut à utiliser les nombres complexes pour résoudre certaines équations de troisième degréle.



(c) Jean-Robert Argand, (1768 - 1822), mathématicien suisse, à l'origine de la représentation géométrique des nombres complexes. Le plan complexe est d'ailleurs appelé plan d'Argand-Cauchy.

FIGURE 3.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des nombres complexes.

Sommaire

3.1 Origines de sa découverte

Lorsqu'il exposa sa méthode pour résoudre les équations de troisième degré de la forme $x^3 + px = q$, Jérôme Cardan ne s'attendait pas à deux choses :

1. être accusé de plagiat par Nicolas Tartaglia qui qui revendiquait être le premier à avoir trouvé cette méthode,
2. que la résolution de certains cas insolubles dans les réels, pouvait finalement être possible en utilisant des notations inhabituelles qui seront à l'origine des nombres complexes. Et cette méthode fut présentée par Rafael Bombelli, toujours au 16ème siècle.

Les nombres complexes intéressèrent les mathématiciens comme Leonhard Euler qui attribua la notation i de l'imaginaire pur, Jean-Robert Argand qui proposa une étude géométrique, mais également Jean le Rond d'Alembert, Caspar Wessel, Buée, Gauss, Cauchy parmi les plus célèbres et les plus anciens.
Les nombres complexes sont essentiels dans la géométrie algébrique et analytique moderne, et font partie de la recherche très active en mathématiques encore maintenant.
Nous allons rappeler ici leur définition, certaines de leurs propriétés algébriques et géométriques.

3.2 Nombres complexes : forme algébrique

Nous ne souhaitons pas ici détailler la façon dont les nombres complexes peuvent se construire (il faudrait rappeler ce qu'est un corps, ses propriétés et définir des applications). Nous n'avons pas encore tous les outils entre les mains, et nous laissons pour l'instant les curieux le soin d'aller voir cette partie dans des ouvrages à la bibliothèque ou sur internet. Nous allons directement attaquer cette section par les définitions des complexes.

3.2.1 Lien entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Définition 1 ($\mathbb{R}^2$)

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (a, b) de nombres réels.
Deux éléments de (a, b) et (a', b') de $\mathbb{R}^2$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Maintenant que nous avons défini $\mathbb{R}^2$ essayons de mettre cet ensemble en relation avec les complexes.

Définition 2 (Nombres complexes)

Le corps des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition et d'une multiplication définies pour tous (a, b), et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ par,

1. $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$,
2. $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Notation 1 (Convention pour les réels)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous conviendrons d'identifier le nombre complexe $(x, 0)$ et le réel x.
2. L'ensemble des réels est donc identifié à l'ensemble des nombres complexes de la forme $(x, 0)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Notation 2 (Imaginaire)

Le nombre complexe $(0, 1)$ est noté i.

En conséquence, nous avons alors la possibilité d'écrire :

1. Par la règle 1 de la définition 2), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b),$$
2. Par la règle 2 de la définition 2, pour tout $b \in \mathbb{R}$,
$$i(b, 0) = (0, 1)(b, 0) = (0, b),$$
3. Et finalement nous pouvons écrire pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) = a + ib.$$

3.2.2 Partie réelle, partie imaginaire et conjugué

Propriété 1 (Égalité de deux complexes)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$,
2. $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Définition 3 (Partie réelle partie imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Il existe un couple unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

1. $a + ib$ est appelée forme algébrique du complexe z,
2. a est appelée partie réelle de z, on la note $\text{Re}(z)$,
3. b est appelée partie imaginaire de z, on la note $\text{Im}(z)$.

Nous noterons l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$.
Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 2 (Réel et Imaginaire pur)

1. Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire pure est nulle, c'est à dire
$$z \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \text{Im}(z) = 0.$$
2. Un nombre complexe est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle, c'est à dire
$$z \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } \text{Re}(z) = 0.$$

En prenant maintenant la notation des complexes sous la forme algébrique, nous avons les propriétés suivantes

Propriété 3 (Addition et produit : forme algébrique)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. Somme : $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$,
2. Produit : $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$,
3. Carré de i : $i^2=-1$. Le nombre i ne peut pas être un réel (c'est un nombre négatif égal à un carré).

Définition 4 (Conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de notation algébrique $z=a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous appelons conjugué de z le nombre complexe $a-ib$, que nous noterons $\overline{z}$.

Nous avons quelques propriétés pour les conjugués.

Propriété 4 (Propriétés du conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

1. le conjugué de $\overline{z}$ est, $\overline{(\overline{z})}=z$,
2. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$,
3. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z=\overline{z}$,
4. $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z=-\overline{z}$.

Et d'après la partie 2 de la propriété 1, deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(\overline{z})$.

3.2.3 Calculs sur les complexes

Nous avons plusieurs propriétés supplémentaires sur l'addition et la multiplication des complexes.

Propriété 5 (Propriétés de l'addition)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, l'addition dans $\mathbb{C}$ est

1. Commutative : $z + z' = z' + z$,
2. Associative : $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$,
3. 0 est l'élément neutre : $z + 0 = z$,
4. Symétrique : tout complexe z admet un symétrique dans $\mathbb{C}$, c'est $-z$ (l'opposé de z), sous forme algébrique, si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $-z = -a - ib$.

En mathématique, nous verrons plus tard, que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.

Propriété 6 (Propriétés de la multiplication)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, la multiplication dans $\mathbb{C}$ est

1. Commutative : $zz' = z'z$,
2. Associative : $z(z'z'') = (zz')z''$,
3. 1 est l'élément neutre : $z \times 1 = z$,
4. Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe $z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$ tel que $zz' = 1$. Nous notons ce nombre $\dfrac{1}{z}$ ou encore z^{-1}, et c'est l'inverse de z. Sous forme algébrique, pour $z = a + ib \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

En mathématique, nous verrons plus tard, que, grâce à ces deux propriétés, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (c'est que nous avons déjà entrevu dans la définition 2).

Propriété 7 (Sommes et produits de conjugués)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$,
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}'$,
3. pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$.

Propriété 8 (Sommes des $n+1$ premières puissances de z)

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 1$, alors

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

3.3 Nombres complexes : forme géométrique

Dans toute cette section nous allons travailler dans un plan orienté. Nous ne pouvons pas prendre $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ étant donné que désormais, i est choisi comme le nombre imaginaire pur dont le carré vaut -1. Par conséquent, nous allons travailler dans le plan orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, où $O(0,0)$ est l'origine, et les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux et de norme 1. Par conséquent, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ désignera le point M de coordonnées (a,b).

3.3.1 Image d'un complexe, affixe d'un vecteur et d'un point

Définition 5 (Image et affixe)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$, le point $M(a,b)$ est appelé l'image de z.
2. Soit $M(a,b)$ un point du plan, le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe de M. On pourra noter quelques fois aff(M) l'affixe du point M.

Définition 6 (Image et affixe)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$, le vecteur $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ est l'image vectorielle de z.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (a,b) dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, Le nombre complexe $a + ib$ est appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$. On pourra également noter aff$(\overrightarrow{u})$ l'affixe du vecteur u.

Par conséquent, pour tout point M du plan, aff(M)=aff($\overrightarrow{OM}$).

3.3.2 Interprétation géométrique

Commençons par la somme de deux complexes :

Propriété 9 (Affixe de la somme de vecteurs)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors

$$\text{aff}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \text{aff}(\overrightarrow{u}) + \text{aff}(\overrightarrow{v}).$$

Propriété 10 (Affixe et points)

Soient A et B deux points du plan. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) \text{-} \text{aff}(A).$$

Propriété 11 (Translation et somme)

Soit $p \in \mathbb{C}$ un complexe. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe p. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'un point M du plan d'affixe z, est un point M' du plan d'affixe $z' = z + p$.

Propriété 12 (Réflexion et conjugué)

La réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$ d'un point M du plan d'affixe z est le point M' du plan d'affixe $\overline{z}$.

En d'autres termes, l'image par la réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$ de $M(a, b)$ est $M(a, -b)$.

3.3.3 Module

Définition et propriétés

Définition 7 (Module)

Soit $z \in \mathbb{C}$, d'image M. Le module de z est la norme $\|\overrightarrow{OM}\|$. Nous le notons $|z|$.

Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 13 (Propriétés du module)

1. Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes, d'images respectives M et M' alors
$$|z - z'| = \|\overrightarrow{MM'}\|.$$
2. Pour tout complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels,
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
3. $|z|^2 = z\overline{z}$ ou encore $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
4. $|z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |-z|$.
5. $|zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$ alors $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $|\frac{z'}{z}| = \frac{|z'|}{|z|}$.
6. $|z^n| = |z|^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et même $\mathbb{Z}$ si $z \neq 0$.
7. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
8. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.

Lorsque z est seulement réel, son module correspond à la valeur absolue de z.

Interprétation géométrique du module

Propriété 14 (Inégalité triangulaire)

Soient z et z' deux complexes, nous avons
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Propriété 15 (Cercles, disques)

Soit a un nombre complexe, soit $r > 0$ un réel. Notons A l'image de a alors nous avons :

1. $|z - a| = r$ décrit le cercle de centre A et de rayon r,
2. $|z - a| \leq r$ le disque fermé (contenant le bord) de centre A et de rayon r,
3. $|z - a| < r$ le disque ouvert (sans les bord) de centre A et de rayon r.

Remarquons que si $a = 0$, alors $A = O$ (l'origine) et me cercles et disques sont centrés en O.

3.3.4 Racines carrées et équations du second degré

Soit $z \in \mathbb{C}$, une racine carrée de z est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$.

Proposition 1 (Racine carrée)

Soient z un nombre complexe quelconque, alors z admet deux racines carrées complexes ω et $-\omega$.

Attention : contrairement au cas réel, qui nous dit que si $x \in \mathbb{R}_+$ est un réel positif ou nul, nous avons deux racines de ce nombre qui sont $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$, mais nous privilégions quand même le fait de dire que $\sqrt{x}$ est la racine réelle de x.
Pour les complexes nous ne privilégions pas une racine par rapport à une autre parce que z se trouve n'importe où dans le plan. Parler de complexe positif n'a pas de sens. Donc on ne privilégie pas de racine en particulier, et on parle alors de ω comme une racine de z.

Étudions maintenant les polynômes de second degré avec les coefficients complexes d'abord, puis réels.

Proposition 2 (Équation du second degré coef. complexes)

L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et $c \in \mathbb{C}$, et en plus $a \neq 0$ possède deux solutions complexes z_1 et z_2 (qui peuvent être confondues).
Si l'on pose $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant, et δ une racine carrée de Δ, alors les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Si on s'autorisait à écrire $\delta = \sqrt{\Delta}$ nous aurions le même réultat que l'on connait quand a, b et c sont réels (voir ci-dessous). Mais on ne le fait pas. Si par contre les coefficients du polynôme sont réels, nous avons

Proposition 3 (Équation du second degré coef. réels)

L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et $c \in \mathbb{R}$, et en plus $a \neq 0$. Alors le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est réel et nous avons trois cas :

1. si $\Delta = 0$, nous avons une racine double réelle qui vaut $\dfrac{-b}{2a}$,
2. si $\Delta > 0$, nous avons deux solutions réelles $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
3. si $\Delta < 0$, nous avons deux solutions complexes (et non réelles) $\dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$,

3.3.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 1 (d'Alembert-Gauss)

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n.
Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité (racines doubles, racines triples, etc. suivant les cas).
Ceci veut dire qu'il existe z_1, z_2, ... ,z_n, n nombres complexes (parfois confondus) tels que

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n).$$

3.3.6 Argument et trigonométrie

Considérons le nombre complexe $z = x + iy$. Supposons que son module $|z| = 1$, alors nous avons $x^2 + y^2 = 1$. Et donc, comme vu précédemment, le point $M(x, y)$ est sur le cercle centré en O et de rayon 1. Nous appelons ce cercle, le cercle unité.
Par définition du cosinus et du sinus, l'abscisse (ou partie réelle de z), x est notée $\cos(\theta)$ et l'ordonnée (ou partie imaginaire de z), y est notée $\sin(\theta)$, où θ est une mesure de l'angle entre l'axe des réels (abscisses) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition 8 (Argument)

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ e t tel que
$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelé argument de z et on le note $\theta = \arg(z)$.
Cet argument est défini modulo 2π (c'est à dire à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$).
Nous pouvons imposer quelques fois à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, \pi]$.

En conséquence : deux nombres réels θ et θ' sont arguments d'un même complexe z si et seulement s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. On écrit cette dernière égalité

$$\theta' \equiv \theta \mod (2\pi), \quad \text{que nous lisons "}\theta'\text{ est congru à }\theta\text{ modulo }2\pi\text{".}$$

D'autre part, nous avons la relation entre les arguments et les angles :

1. pour tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$, d'image M, l'argument de z est l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ que l'on note
$$\arg(z) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}).$$
2. D'autre part, étant donné $z \in \mathbb{C}^*$, on considère M d'affixe z. Toute mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ est appelé argument de z et noté $\arg(z)$.

Nous avons les propriétés suivantes

Propriété 16 (Propriétés des arguments)

Soient z et z' deux nombres complexes **non nuls**. Nous avons

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + arg(z')$ (mod 2π),
2. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)$ (mod 2π),
3. $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)$ (mod 2π),
4. $\arg(\frac{z'}{z}) \equiv \arg(z') - \arg(z)$ (mod 2π) ,
5. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)$ (mod 2π).

Une conséquence directe de la propriété 4 est que si l'on a deux complexes non nuls z et z' alors

$$\arg(z) = \arg(z') \text{ si et seulement si } \frac{z'}{z} \text{ est un réel strictement positif.}$$

car les nombres complexes d'argument 0 sont les réels strictement positifs.

Formule de Moivre et notation exponentielle

Propriété 17 (Formule de Moivre)

Pour tout réel θ et tout entier n, nous avons

$$(\cos(\theta)) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Nous définissons alors la notation exponentielle

Définition 9 (Notation exponentielle)

Nous définissons l'exponentielle complexe pour tout réel θ par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

En conséquence, tout nombre complexe s'écrit de la façon suivante

$$z = \rho e^{i\theta},$$

où $\rho = |z|$ est le module de z et $\theta = \arg(z)$ est un argument de z. C'est ce que l'on appelle la forme trigonométrique de z.
Remarquons que si $|z| = 1$, alors nous avons $z = e^{i\theta}$.
Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 18 (Propriétés exponentielles de complexes)

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, nous avons

1. $zz' = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$,
2. $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$,
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$,
4. $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$,
5. Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (le module est ici égal à 1),
6. $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ si et seulement si $\rho = \rho$ et $\theta \equiv \theta'$ (mod 2π).

En conséquence,

$$e^{i\theta} = 1 \text{ si et seulement s'il existe } k \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } \theta = 2k\pi.$$

Donnons maintenant quelques propriétés géométriques sur les arguments, les angles et l'orthogonalité

Propriété 19 (Angle formé par trois points)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right).$$

Propriété 20 (Alignement)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors :

"A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)$ est réel".

Propriété 21 (Perpendiculaire)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors

" les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)$ est imaginaire pur".

Rappelons ici quelques angles connus

3.3.7 Racines nièmes d'un complexe

Nous avons vu un peu plus haut (section 1) les racines carrées d'un nombre complexe. Allons plus loin ici en étudiant les racines nièmes.

Mesure de l'angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Valeur du cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Valeur du sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Valeur de la tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0

FIGURE 3.2 – Cosinus et sinus des angles les plus connus

Définition 10 (Racine nième)

Soient $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ (c'est à dire que $n \neq 0$ et 1). Une racine nième de z est un nombre complexe ω tel que

$$\omega^n = z.$$

Propriété 22 (Racines nième d'un complexe)

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul, qui s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ admet exactement n racines nièmes, ce sont les nombres ω_k définis pour tout $k = 0, ..., n-1$ par

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Remarquons que si l'on pose $\omega_0 = \sqrt[n]{\rho}e^{i\theta/n}$ et $\tilde{\omega} = e^{i2\pi/n}$ alors $\omega_k = \omega_0\tilde{\omega^k}$.
Un cas particulier est la propriété suivante :

Propriété 23 (Racines nième de 1)

Les n racines nièmes de 1 sont $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, ..., n-1$.

3.3.8 Quelques applications trigonométriques

3.3.9 Formules de l'addition

Rappelons les formules de l'addition de sinus et cosinus.

Propriété 24 (Formules d'addition)

Pour tous réels a et b nous avons

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{array}$$

Pour la tangente nous avons

Propriété 25 (Formule de la tangente)

Pour tous réels $a \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π), $b \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π) et $a+b \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π) nous avons

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

3.3.10 Formules de duplication de l'argument

Propriété 26 (Formules de duplicaton)

Pour tous réels a nous avons

$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a), \\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a), \\ \tan(2a) & = & \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}, \quad a \neq \pi \text{mod } (\pi), \quad \text{et} \quad a \neq \dfrac{\pi}{4} \text{mod } (\pi/2) \end{array}$$

Propriété 27 (Formules d'Euler)

Pour tout réel θ, nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Il y a quelques applications aux formules d'Euler et notamment les formules de linéarisation

Propriété 28 (Formules de linéarisation)

Pour tous réels a et b nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= (\cos(a+b)+\cos(a-b))/2,\\
\sin(a)\sin(b) &= (\cos(a-b)-\cos(a+b))/2,\\
\sin(a)\cos(b) &= (\sin(a+b)+\sin(a-b))/2,\\
\sin(a)\cos(a) &= \sin(2a)/2,\\
\cos^2(a) &= \frac{1+\cos(2a)}{2},\\
\sin^2(a) &= \frac{1-\cos(2a)}{2}.
\end{aligned}$$

et si on pose $p = a + b$ et $q = a - b$, nous obtenons

Propriété 29 (Formules de conversion de somme en produit)

Pour tous réels p et q nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}),\\
\cos(p)-\cos(q) &= -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}),\\
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}),\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}),
\end{aligned}$$

3.3.11 Nombres complexes en géométrie

Nous considérons le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Tout point M de coordonnées (x, y) peut être repéré par son affixe $z = x + iy$.

Homothétie, interprétation de $z \to az + b$, $a \neq 0$

Propriété 30 (Homothétie)

L'homothétie de centre A, tel que aff(A)= z_0, et de rapport $k \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' - z_0 = k(z - z_0) \text{ ou aussi } z' = kz + (1 - k)z_0.$$

Propriété 31 (Homothétie de rapport a)

L'application $z \mapsto z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $b \in \mathbb{C}$ représente une homothétie de rapport a.
Si $a = 1$ nous avons une translation $z \mapsto z' = z + b$, où $b = z_0$.

Conséquence : la réciproque d'une homothétie h, représentée par $z \mapsto az + b$ est une homothétie de même centre.

Propriété 32 (Composée d'homothétie)

Soient f et g deux homothéties (ou translations) du plan, représentées respectivement par

$$\varphi : z \mapsto az + b \text{ et } \psi : z \mapsto a'z + b, \text{ avec } aa' \neq 0.$$

La composée $g \circ f$ est représentée par

$$\psi \circ \phi : z \mapsto a'(az + b) + b' = aa'z + a'b + b'.$$

3.3.12 Rotation, interprétation de $z \mapsto az + b$, avec $|a| = 1$

Propriété 33 (Rotation)

Étant donné un point A d'affixe z_0, la rotation de centre A et d'angle α, est l'application qui transforme un point M d'affixe z en M' d'affixe z' telle que

$$z' - z_0 = (z - z_0)e^{i\alpha}$$

Conséquence : l'application $z \mapsto az + b$, avec $|a| = 1$ s'interprète géométriquement comme

1. une rotation d'angle α =arg(a), lorsque $a \neq 1$,
2. la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, avec b =aff$(\overrightarrow{u})$ lorsque $a = 1$

La réciproque d'une rotation de centre A et d'angle α est la rotation de même centre A et d'angle $-\alpha$.

3.3.13 Similitudes directes planes

1. Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre :

Propriété 34 (Composée homothétie, rotation)

On considère une homothétie H de centre A et de rapport $k > 0$, et une rotation R de même centre A et d'angle θ. Alors $H \circ R$ conserve les angles orientés et multiplie les distances par k.
L'écriture complexe d'une telle composée, en définissant z_0, l'affixe de A, et M' d'affixe z', l'image de M d'affixe z par $H \circ R$, est donnée par :

$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0).$$

Définition 11 (Similitude directe)

Une similitude directe S est une application qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = az + b$ avec a et b complexes donnés, et $a \neq 0$.
L'angle de S est arg(a) et son rapport est $|a|$.

Propriété 35 (Composée de similitudes directes)

La composée de deux similitudes directes S et S' de représentation complexes $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a'z+b'$, avec $aa' \neq 0$, est encore une similitude directe d'angle arg(aa') =arg(a)+arg(a') et de rapport $|aa'| = |a||a'|$, autrement dit, c'est la somme des angles et le produit des rapports.

Remarque *(a) si deux similitudes ont des angles opposés, leur composée est une homothétie,*

(b) si deux similitudes ont des rapports inverses, leur composée est une rotation.

2. Décomposition en rotation et homothétie

Propriété 36 (Point invariant)

Toute similitude directe, autre qu'une translation, admet un point invariant et un seul, qui est appelé le centre de la similitude.

3. Détermination d'une similitude directe

Propriété 37 (Existence et unicité)

Étant donnés P, Q, P' et Q' quatre points tels que $P \neq Q$ et $P' \neq Q'$, il existe une similitude directe S et une seule telle que $S(P) = P'$ et $S(Q) = Q'$.
Si p, q, p' et q' sont respectivement les affixes de ces 4 points, et que l'on considère que la représentation complexe de S est l'application $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, alors

$$a = \frac{p' - q'}{p - q} \text{ et } b = \frac{pq' - p'q}{p - q},$$

l'angle et le rapport de S sont donnés alors respectivement par l'argument et le module de a.

Chapitre 4

Arithmétique

La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques.

Carl Friedrich Gauss

Sommaire

(a) Euclide (vers 300 avant J.-C.), mathématicien de la Grèce antique, auteur des *Elements*, l'un des textes fondateurs des mathématiques en Occident.

(b) Étienne Bézout (1730 - 1783), mathématicien français, on luit doit entre autres l'identité et le théorème qui portent son nom et son œuvre principale, *Théorie générale des équations algébriques*.

(c) Pierre de Fermat (première décennie du 17ème siècle - 1665), est un magistrat, mathématicien français, on lui doit entre autres des travaux sur les nombres premiers et notamment *le petit théorème de Fermat*.

FIGURE 4.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'arithmétique.

Le but de ce chapitre est de formaliser ce que nous faisons (plus ou moins naturellement) depuis l'école primaire sans trop vraiment se poser de questions : que ce soient la manipulation des nombres premiers, les divisions euclidiennes, le calcul des PPCM et des PGCD, des calculs qui nous semblent aussi vieux que le monde, et qui sont pourtant d'une grande modernité.

4.1 Nombres premiers

Commençons par les nombres premiers, qui conservent encore beaucoup de secrets pour les chercheurs du monde entier et dont l'une des applications dans la vie quotidienne est la cryptographie.
Le nombre premier le plus grand connu à présent, date de janvier 2016, il s'agit du nombre premier de Mersenne et vaut $2^{74207281} - 1$, qui comporte plus de 22 millions de chiffres (22 338 618) en écriture décimale (sachant qu'un nombre entier à 9 chiffres correspond déjà au milliard).

Définition 1 (Multiple)

Nous disons qu'un nombre entier relatif $a \in \mathbb{Z}$ est un **multiple** de $b \in \mathbb{Z}$ (ou que b est un **diviseur** de a) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a = kb.$$

Exemple

1. 6 *est multiple de* 3 *car* $6 = 2 \times 3$, $k = 2$.
2. 0 *est multiple de tout entier* n, *car* $0 = 0 \times n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $k = 0$.
3. *Tout nombre entier est un multiple de* 1 *et de lui-même :* $n = 1 \times n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2 (Nombre premier)

Nous disons qu'un nombre entier naturel $p \geq 2$ est un **nombre premier** lorsqu'il possède comme seuls diviseurs positifs 1 et lui-même.

Théorème 1 (Entiers et nombres premiers)

Tout nombre entier $n \geq 2$ est le produit de nombres premiers.

Théorème 2 (Théorème d'Euclide)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Remarque *Il existe plusieurs façon de les trouver (avec plus ou moins d'efficacité) :*

1. *le crible d'Eratosthène (voir figure 4.2),*
2. *le crible de Sundaram,*

et plusieurs tests permettant de voir si un nombre donné est premier ou non

1. *le test probabiliste de primalité,*
2. *le test de primalité de Fermat,*
3. *le test de primalité de Solovay-Strassen,*
4. *le test de primalité de Miller-Rabin,*
5. *Le test de primalité AKS (Agrawal-Kayal-Saxena ou test cyclotomique AKS)...*

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130
131	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150
151	152	153	154	155	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	169	170
171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	**193**	194	195	196	**197**	198	**199**	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	**223**	224	225	226	**227**	228	**229**	230
231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	**257**	258	259	260
261	262	**263**	264	265	266	267	268	**269**	270
271	272	273	274	275	276	**277**	278	279	280
281	282	**283**	284	285	286	287	288	**289**	290

FIGURE 4.2 – Efficacité du crible d'Eratosthène sur les 290 premiers nombres.

4.2 Division Euclidienne

Théorème 3 (Division euclidienne)

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (b entier ≥ 1).Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} a &= bq + r, \\ 0 &\leq r < b. \end{cases}$$

C'est ce que nous appelons la division euclidienne de a par b.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad \begin{array}{r|l} \textbf{dividende} & \textbf{diviseur} \\ \hline \textbf{reste} & \textbf{quotient} \end{array}$$

Remarque
$r = 0$ est équivalent à dire que b divise a (ou que a est multiple de b).

4.3 PGCD-PPCM

Définition 3 (pgcd)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers non tous les deux nuls.
Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle **le plus grand commun diviseur** de a et b et se note **pgcd**(a, b).

Exemple

1. *Pour tous k et $a \in \mathbb{Z}$, pgcd(a, ka)= a.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pgcd$(a, 0)$= a.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pgcd$(a, 1)$= 1.*

Définition 4 (ppcm)

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Le plus petit entier multiple à la fois de a et de b s'appelle le plus petit commun multiple de a et b et se note **ppcm**(a, b)

Exemple

1. *Pour tous k et $a \in \mathbb{N}^*$, ppcm(a, ka)= ka.*
2. *Si $b = 0$, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, ppcm$(a, 0)$= 0.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, ppcm$(a, 1)$= a.*

Théorème 4 (Existence et unicité du ppcm)

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geq \mathbb{N}^*$ deux entiers, alors il existe un unique $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $m \in \mathbb{N}^*$,

$$m \text{ est multiple de } a \text{ et de } b \Leftrightarrow m \text{ est multiple de } M.$$

Ce nombre M =ppcm(a, b).

Théorème 5 (Existence et unicité du pgcd)

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geq \mathbb{N}^*$ deux entiers, alors il existe un unique $D \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $d \in \mathbb{N}^*$,

$$d \text{ est divise } a \text{ et } b \Leftrightarrow d \text{ divise } M.$$

Ce nombre D =pgcd(a, b).

4.4 Algorithme d'Euclide

Proposition 1 (Égalité de pgcd)

Soient a, $b \in \mathbb{N}^*$. Soient $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $a = bq + r$, alors

$$\text{pgcd}(a, b)\text{=pgcd}(b, r).$$

Ceci nous permet de trouver le pgcd entre deux nombres entiers strictement positifs, en utilisant l'algorithme d'Euclide.
Algorithme d'Euclide :
Nous souhaitons calculer le pgcd de a et $b \in \mathbb{N}^*$.
Nous supposons que $a \geq b$ (sinon nous faisons jouer le rôle de b à a et inversement).
Nous calculons les divisions euclidiennes successives.
Le pgcd sera le dernier reste non nul !
Voici comment nous procédons.

1. La division de a par b nous donne l'existence de q_1 et r_1 tels que $a = bq_1 + r_1$. Nous avons alors

$$\text{pgcd}(a, b)\text{=pgcd}(b, r_1).$$

Nous avons alors deux sous cas.

(a) Si $r_1 = 0$ alors pgcd(a, b)=b.

(b) Sinon, on continue à l'étape suivante.

2. La division de b par $r1$ nous donne l'existence de q_2 et r_2 tels que $b = r_1 q_2 + r_2$. Nous avons alors

$$\text{pgcd}(b, r_1)\text{=pgcd}(r_1, r_2).$$

Nous avons alors deux sous cas.

(a) Si $r_2 = 0$ alors pgcd(b, r_1)=r_1.

(b) Sinon, on continue à l'étape suivante.

3. La division de r_1 par r_2 nous donne l'existence de q_2 et r_3 tels que $r_1 = r_2 q_3 + r_3$. Nous avons alors

$$\text{pgcd}(r_1, r_2)\text{=pgcd}(r_2, r_3).$$

$$\vdots$$

et nous continuons jusqu'à arriver au reste nul, c'est à dire

4. La division de r_{k-1} par r_{k-2} nous donne l'existence de q_{k+1} et $r_{k+1} = 0$ tels que $r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0$. Nous avons alors

$$\text{pgcd}(a, b)\text{=pgcd}(r_{k-1}, r_k)\text{=pgcd}(rk, 0)\text{=}\ r_k.$$

Remarque
A chaque étape on sait que le reste est plus petit que le quotient, et donc que pour tout $i \geq 1$, nous avons $0 \leq r_{i+1} < r_i$. Nous sommes donc sûrs d'obtenir un reste nul un moment donné (fini, car $r_i \in \mathbb{N}^*$ est un nombre fini).

Définition 5 (Nombres premiers entre eux)

Deux nombres a et $b \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux si et seulement si

$$\text{pgcd}(a, b)\text{=}1.$$

Remarque
Si deux entier ne sont pas premiers entre eux, nous pouvons nous y ramener en divisant par leur pgcd.

4.5 Identité et théorème de Bézout

Théorème 6 (Identité de Bézout)

Soient a et $b \in \mathbb{N}$. Alors il existe u et $v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = \text{pgcd}(a, b).$$

Ces entiers relatifs u et v ne sont pas uniques. Ils sont appelés **coefficients de Bézout**.

Remarque
Les coefficients de Bézout u et v s'obtiennent en remontant l'algorithme d'Euclide.
Il faut pour cela isoler le dernier reste non nul d' algorithme. Puis remplacer à chaque fois la valeur du reste de l'étape précédente.

Exemple *Si $a = 600$ et $b = 124$.*
L'algorithme d'Euclide nous donne :

$$\begin{array}{llllllll} i- & 600 & = & 124 & \times & 4 & + & 104, \\ ii- & 124 & = & 104 & \times & 1 & + & 20, \\ iii- & 104 & = & 20 & \times & 5 & + & 4, \\ iv- & 20 & = & 4 & \times & 5 & + & 0. \end{array}$$

Donc pgcd$(600, 124)$*=* 4.
Ensuite nous remontons cet algorithme :
Nous partons de
iii- $4 = 104 - 20 \times 5$.
Puis nous remplaçons 20 *par sa valeur trouvée en l'isolant dans 2- :*
ii-$4 = 104 - (124 - 104 \times 1) \times 5$.
Ce qui nous donne :
ii-$4 = 104 \times 6 + 124 \times (-5)$.
Nous remplaçons ensuite 104 *par sa valeur trouvée en l'isolant dans 1- :*
i- $4 = (600 - 124 \times 4 \times 6 + 124 \times (-5)$
Ce qui au final nous donne :
$4 = (600 \times 6 + 124 \times (-29)$
et nous avons $u = 6$ et $v = -29$.

Théorème 7 (Théorème de Bézout)

Soient a et $b \in \mathbb{N}$. Ces entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe u et $v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = 1.$$

4.6 Théorème de Gauss et décomposition en facteurs premiers

Théorème 8 (Théorème de Gauss)

Soient a, b et $c \in \mathbb{N}*$. Si a divise bc et si a et c sont premiers entre eux, alors a divise b.

Une des applications de ce théorème est la résolution des équations diophantiennes.

Proposition 2 (Équations diophantiennes)

Soient a, b, et $c \in \mathbb{Z}$. Considérons l'équation

$$ax + by = c,$$

1. Cette équation possède des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ si et seulement si le pgcd(a, b) divise c.
2. Si pgcd(a, b) divise c, alors il existe une infinité de solutions entières qui sont de la forme $(x_0 + \alpha k, y_0 + \beta k)$ où x_0, y_0, α et $\beta \in \mathbb{Z}$ et k parcourt $\mathbb{Z}$.

FIGURE 4.3 – Diophante d'Alexandrie (entre 1er siècle avant J.-C. et le 4ème siècle après J.-C), mathématicien de langue grecque qui a vécu à Alexandrie, il est l'auteur d'*Arithmétique* dans lequel sont étudiées certaines équations diophantiennes. On l'appelle parfois "père de l'algèbre".

Une application du théorème de Gauss est la proposition suivante :

Proposition 3 (Nombres premiers et coefficients binomiaux)

Pour tout nombre premier p et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq p - 1$, alors p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

Théorème 9 (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique k-uplet $(p_1, p_2, ..., p_k)$de nombres premiers vérifiant

$$p_1 < p_2 < ... < p_k,$$

et un unique k-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ d'entier naturels non nuls tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_k^{\alpha_k}.$$

Remarque
Une des principales raisons pour laquelle nous choisissons de dire que 1 *n'est pas un nombre premier est que sinon il n'y aurait pas unicité de cette décomposition.*

Exemple
Nous aurions par exemple
$24 = 2^3 \times 3 = 1 \times 2^3 \times 3 = 1^2 \times 2^3 \times 3 = 1^3 \times 2^3 \times 3 = ...$

4.7 Congruence

Définition 6 (Congruence)

Soient a et $b \in \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disons que a est **congru** à b modulo n si $a - b$ est un multiple de n. On écrira

$$a \equiv b\ [n] \text{ ou } a \equiv b(\text{n}).$$

Remarque
D'après la définition, nous avons donc

$$a \equiv b\ [n] \quad \Leftrightarrow \quad \textit{il existe } k \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } a = b + kn.$$

Proposition 4 (Propriétés des congruences)

Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $a \equiv a\ [n]$ ($\equiv$ est réflexive),
2. si $a \equiv b\ [n]$ alors $b \equiv a\ [n]$ ($\equiv$ est symétrique),
3. si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$ ($\equiv$ est transitive).

Nous avons une autre proposition sur la somme et le produit :

Proposition 5 (Congruence, somme et produit)

Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $a \equiv b\ [n]$ alors $a + c \equiv b + c\ [n]$,
2. si $a \equiv b\ [n]$ alors $ac \equiv bc\ [n]$.

Théorème 10 (Congruence et puissance)

Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ et n et $p \in \mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$\text{si } a \equiv b\ [n] \text{ alors } a^p \equiv b^p\ [n]$$

4.8 Bases

Théorème 11 (Numération en base b)

Soit b un entier, $b \geq 2$. Tout entier non nul x peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0,$$

où n est un entier, a_0, a_1,..., a_n sont des entier appartenant à $[0, b-1]$ et $a_n \neq 0$.
Nous disons alors que $x = \overline{a_0 a_1 ... a_n}^b$ est l'écriture de x en base b.

Remarque

Quelques bases classiques :

1. *système binaire (base 2) :* $\{0, 1\}$,
2. *système quinaire (base 5) :* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$,
3. *système octal (base 8) :* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
4. *système décimal (base 10) :* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
5. *système duodécimal (base 12) :* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$,
6. *système vicésimal (ou vigésimal) (base 20),*
7. *système sexagésimal (base 60).*

Exemple

1. $x = \overline{101100110101}^2 = \overline{5465}^8 = \overline{2869}^{10}$,
2. $x = \overline{173}^{10} = \overline{10101101}^2 = \overline{255}^8$.

4.9 Petit théorème de Fermat et Théorème des restes chinois

Théorème 12 (Congruence et nombre premier)

Soit p un nombre premier. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$a^p \equiv a[p].$$

Théorème 13 (Petit théorème de Fermat)

Soit p un nombre premier. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a n'étant pas un multiple de p, nous avons

$$a^{p-1} \equiv 1[p].$$

Remarque
Pour l'histoire, le mathématicien Gauss mentionne en 1801 ce théorème en soulignant " son élégance et sa grande utilité", en l'appelant théorème de Fermat. C'est Kurt Hensel en 1931 qui le baptise "petit théorème de Fermat (kleine Fermatsche Satz)" par opposition au "grand théorème de Fermat" appelé également "dernier théorème de Fermat", ou "théorème de Fermat-Wiles" en hommage à Andrew Wiles qui l'a demontré en 1995 qui s'énonce comme suit : "il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que n est un entier strictement supérieur à 2".

Théorème 14 (Théorème des restes chinois)

Soient m_1, m_2,...,m_r des entiers positifs deux à deux premiers entre eux. Alors le système

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & [m_1], \\ x \equiv a_2 & [m_2], \\ \vdots & \\ x \equiv a_r & [m_r]. \end{cases}$$

possède une unique solution x modulo $M = m_1 \times m_2 \times ... \times m_r$, et

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + ... + a_r M_r y_r \ [M],$$

avec $M_i = \dfrac{M}{m_i}$ et $y_i M_i \equiv 1 \ [m_i]$, pour $i = 1, ..., r$.

Remarque

Pour l'histoire, ce théorème porte le nom de théorème des restes chinois pour la raison suivante. Sa première apparait sous forme de problème dans le livre "Sunzi suanjing " de Sun Zi (mathématicien chinois du 3ème sièclee), le Sunzi suanjing. Le mathématicien chinois Qin Jiushao en fait mention dans son dans son "Traité mathématique en neuf chapitres" (le Shushu Jiuzhang) publié en 1247. On l'associe souvent au problème soulevé par le général Han Xin qui souhaitait compter son armée : "combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes, il reste trois soldats et, rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ?".

Chapitre 5

Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

C'est le propre des êtres vivants de faire aimer la vie, même sous la forme d'une équation du second degré, mais la vitalité n'a jamais été inscrite au programme des écoles.

Daniel Pennac

Sommaire

(a) Muhammad Ibn Musa al-Khuwarizmi, ou encore Al-Khwarizmin (vers 780- vers 850), mathématicien perse, son travail a permis d'introduire l'algèbre en Europe. Son nom est à l'origine du mot algorithme et son livre à l'origine du mot Algèbre où il montre comment résoudre les 6 équations canoniques du second degré et les méthodes pour s'y ramener.

(b) Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783), français,très profifique, il est notamment à l'origine du théorème Gauss-d'Alembert) qui dit que tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$.

(c) Évariste Galois (1811-1832), un mathématicien français, généralise les travaux d'Abel sur les polynômes. Il introduit une méthode qui permet de savoir si une équation particulière est résoluble par radicaux.

FIGURE 5.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'arithmétique.

Les polynômes ont été les premières équations qu'il a fallu résoudre, et qui ont engendré non seulement des outils nécessitant une formidable intuition comme les nombres complexes, mais des pans entiers des mathématiques modernes. Des équations de degré étudiées dans les temps les plus reculés, jusqu'aux équations de degré quelconque, l'étude des polynôme a accompagné les mathématiciens au cours des siècles en surprenant toujours par la richesse des résultats qui en on découlé et qui en découlent encore. Nous allons ici traiter des polynômes de degré quelconque et apprendre à les apprivoiser en essayant de les manipuler avec précaution et la rigueur qui nous accompagne depuis le début de ce cours.

5.1 Définition de polynômes à coefficients réels ou complexes

Faisons une remarque préalable. Dans ce cours nous ne chercherons pas à distinguer la notion de polynômes et de fonction polynômiale pour plus de simplicité.

Définition 1 (Polynôme)

Soient $(a_k)_{0 \leq k \leq d}$, $d+1$ complexes ou réels. Nous appelons **polynôme** associé à la fonction polynômiale f de définie sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d, \\ &= a_d x^d + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

l'"objet" noté P défini par

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

d'indéterminé X.

Définition 2 (Monôme)

Nous appelons **monôme** tout polynôme de la forme $a_n X^n$, où $n \in \mathbb{N}$, et $a_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3 ($\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$)

Nous notons $\mathbb{C}[X]$ (respectivement $\mathbb{R}[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients complexes (respectivement réels).

Remarque

1. *Pour P non nul, l'unique entier $d \geq 0$ intervenant dans l'écriture de P en fonction de l'indéterminé X est appelé le degré de P.*
2. *Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.*
3. *Nous noterons le $d^\circ P$ le degré de P.*

Définition 4 (Coefficient dominant)

Pour P non nul de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$), le coefficient dominant de P est le coefficient a_d du terme de plus haut degré dans l'écriture de P en fonction de l'indéterminé X.
Par convention, le coefficient dominant du polynôme nul sera 1.

Définition 5 (Polynôme unitaire)

Un polynôme est dit unitaire (ou normalisé) lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

Maintenant que nous avons défini les principaux acteurs de ce chapitre. Nous pouvons énoncer quelques propriétés relatives aux polynômes.

Proposition 1 (Degré de somme)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$) alors

$$d^\circ(P+Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q).$$

Proposition 2 (Degré de produit)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[X]$) alors

$$d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q.$$

Définition 6 (Polynôme dérivé)

Pour un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[X]$), nous posons

$$P = a_d X^d + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

Nous appelons polynôme dérivé de P, le polynôme P' défini par

$$P' == d a_d X^{d-1} + ... + a_2 X^2 + a_1.$$

Notation 1 (Dérivée n-ième)

Le polynôme dérivé de P' est noté P'', et la dérivée n-ième de P est notée $P^{(n)}$.

Proposition 3 (Dérivée de produit et somme)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[X]$) alors

$$\begin{array}{lcl} (P+Q)' & = & P'+Q', \\ (PQ)' & = & P'Q+PQ'. \end{array}$$

Remarque

Cette formule a évidemment une certaine importance mais pour des exemples concrets elle est assez inutile. En effet,
-si $R = X(X^2+1)$, il est assez maladroit de l'appliquer.
En faisant le calcul nous avons

$$R' = 1(X^2+1) + X.2X = X^2+1+2X^2 = 3X^2+1.$$

-Alors qu'en développant nous avons :

$$R = X(X^2+1) = X^3+X \text{ et donc } R' = 3X^2+1.$$

Définition 7 ($P(x)$)

Soient $x \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et $P \in \mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$) avec

$$P = a_d X^d + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

alors

$$P(x) = a_d x^d + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Proposition 4 ($P(x)+Q(x)$)

Soient $x \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et $P \in \mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$)

$$\begin{array}{lcl} (P+Q)(x) & = & P(x)+Q(x), \\ (PQ)(x) & = & P(x)Q(x). \end{array}$$

Définition 8 (Composée de polynômes)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$) avec

$$P = a_d X^d + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

Nous appelons composée de P et Q, le polynôme

$$P \circ Q = P(Q) = a_d Q^d + ... + a_2 Q^2 + a_1 Q + a_0.$$

5.2 Applications

Proposition 5 (Polynôme nul)

Un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$) avec

$$P = a_d X^d + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

est nul si et seulement si pour tout $i = 0, ..., d$, $a_i = 0$.

Proposition 6 (Égalité de polynômes)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[x]$) avec

$$P = a_d X^d + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

et

$$Q = b_d X^d + ... + b_2 X^2 + b_1 X + b_0.$$

Alors,

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} p & = & q, \\ \text{et} & & \\ a_i & = & b_i \quad \text{pour tout } i = \{0, ..., q\}. \end{cases}$$

5.3 Division Euclidienne

Il s'agit ici d'utiliser pour les polynômes des résultats analogues à ceux énoncés pour les entiers.

1. L'arithmétique des polynômes est analogue à celle de entiers (à condition de travailler sur les polynômes sur un corps commutatif (ce qui est le cas quand on travaille sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. Les énoncées sur les entiers l'étaient sur des entiers positifs. Ils peuvent se modifier sans trop de mal sur $\mathbb{Z}$, mais parfois en s'alourdissant un peu. Les polynômes unitaires joueraient le rôles des entiers positifs mais cela ne sera pas ausi confortable dans la mesure où la somme de deux entiers positifs est positive, alors que la somme de deux polynômes unitaires n'est pas forcément un polynôme unitaire.

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à partir de maintenant.

Définition 9 (Multiple d'un polynôme)

On dit qu'un polynôme P_m de $\mathbb{K}[X]$ est un multiple d'un polynôme $P_d \in \mathbb{K}[X]$ ou que P_d est un diviseur de P_m lorsqu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_m = Q \times P_d$.

Théorème 1 (Division euclidienne)

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui vérifie

$$\begin{cases} A & = & BQ + R, \\ d^\circ R & < & d^\circ B. \end{cases}$$

Exemple

Divisons le polynôme $A = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$ *par* $B = x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^3 - 6x^2 + 6x \phantom{{}+3} & \phantom{x^2 - {}} 6x + 4 \\ \cline{1-2}
 & 4x^2 - 5x + 3 & \\
- & 4x^2 - 4x + 4 & \\ \cline{1-2}
 & -x - 1 &
\end{array}$$

Nous avons alors $6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1)(6x + 4) + (-x - 1)$.

5.4 Pgcd, ppcm

5.4.1 Pgcd

Proposition 7 (Pgcd)

Soient A et B deux polynôme de $\mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B.
Ce polynôme est appelé le plus grand commun diviseur de A et B et on le note pgcd(A, B).

Remarque

1. *pgcd(A, B) est un polynôme unitaire.*
2. *Si A divise B alors pgcd(A, B)= $\dfrac{1}{a_d}A$ si a_d est le coefficient dominant de A.*
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, pgcd$(\lambda A, B)$=pgcd(A, B).*
4. *Si $A = BQ + R$ alors pgcd(A, B)=pgcd(B, R), ce qui nous permet d'utiliser l'algorithme d'Euclide appliqué aux polynômes.*

L'algorithme d'Euclide pour les polynômes s'écrit :

$$\begin{array}{lll}
A & = BQ_1 + R_1, & d^\circ R_1 & < d^\circ B,\\
B & = R_1Q_2 + R_2, & d^\circ R_2 & < d^\circ R_1,\\
R_1 & = R_2Q_3 + R_3, & d^\circ R_3 & < d^\circ R_2,\\
\vdots & & & \\
R_{k-2} & = R_{k-1}Q_k + R_k, & d^\circ R_k & < d^\circ R_{k-1},\\
R_{k-1} & = R_kQ_{k+1} + 0, & &
\end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division, et on arrête l'algorithme lorsque le reste est nul, et le pgcd est le dernier reste nul $\mathbb{R}_k$ ici (rendu unitaire).

Définition 10 (Polynômes premiers entre eux)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que A et B sont premiers entre eux si pgcd(A, B)= 1.

Remarque
Pour A et B quelconques (non nécessairement premiers entre eux), on a pgcd(A, B)= D.
On pose $A = A'D$ et $B = B'D$ et pgcd(A', B')= 1 et on a A' et B' sont premiers entre eux.

Théorème 2 (Théorème de Bézout)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec A et B non nuls. On note D =pgcd(A, B), alors il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$AU + BV = D.$$

Corollaire 1 (Théorème de Bézout)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec A et B non nuls. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe U et V polynômes tels que

$$AU + BV = 1.$$

Corollaire 2 (Diviseur du pgcd)

Soient A, B et C deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec A et B non nuls. Si C divise A et C divise B alors C divise le pgcd(A, B).

Théorème 3 (Théorème de Gauss)

Soient A, B et C deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, si A divise BC et pgcd(A, B)$= 1$, alors A divise C.

5.4.2 Ppcm

Proposition 8 (Ppcm)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec A et B non nuls, alors il existe un unique polynôme unitaire M de plus petit degré tel que A divise M et B divise M.
Ce polynôme est le plus petit commun multiple de A et B et il est noté ppcm(A, B).

Proposition 9 (Ppcm)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec A et B non nuls, et M =ppcm(A, B).
Si $C \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme tel que A divise C et B divise C alors M divise C.

5.5 Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles sont les analogues des nombres premiers. Toutefois, les usages étant ce qu'il sont il y a une petite nuance de vocabulaire. Alors que le mot "nombre premier" est réservé à des entiers positifs, le mot "polynôme irréductible" n'est pas réservé à des polynômes unitaires : il faut donc bien distinguer ces deux notions.

Définition 11 (Polynôme irréductible)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}$ est irréductible lorsqu'il possède deux diviseurs unitaires et ces deux diviseurs unitaires sont le polynôme 1 et le polynôme P divisé par le coefficient dominant de P.

Proposition 10 (Polynômes du premier degré irréductibles)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{K}[X]$, les polynômes du premier degré sont irréductibles.

Proposition 11 (Décomposition en polynômes irréductibles)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout polynôme P non nul peut s'écrire de façon unique (à l'ordre près des facteurs) en produit

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_k^{\alpha_k},$$

où λ est le coefficient dominant de P.

5.6 Racines des polynômes

Définition 12 (Racine ou zéro d'un polynôme)

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine (ou un zéro) de P lorsque $P(a) = 0$.

Proposition 12 (Racine et diviseur)

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, a est une racine de P si et seulement si $x - a$ divise P.

Proposition 13 (racines d'un polynôme de degré n)

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul de degré n possède au plus n racines.

Définition 13 (Racines multiples)

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que

1. a est une racine de multiplicité d'ordre au moins k de P lorsque $(x-a)^k$ divise P,
2. a est exactement racine d'ordre de multiplicité k lorsqu'il est de multiplicité d'ordre k sans être de multiplicité d'ordre $k+1$. On dit que k est l'ordre de multiplicité de la racine.

Proposition 14 (Racines double et dérivée)

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. L'élément a est une racine au moins double de P si et seulement si a est une racine de P et P'.

Quelle est la différence entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ en ce qui concerne les racines et les polynômes irréductibles ? Les trois théorèmes suivants permettent de donner un aperçu de quelques différences.

Théorème 4 (Théorème de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au-moins une racine complexe.
Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Définition 14 (Polynôme scindé)

On dit qu'un polynôme est scindé lorsqu'il peut s'écrire sous forme de produit de facteurs du premier degré.

Nous allons donner le résultat suivant qui énonce que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé.

Théorème 5 (Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ sont les polynômes de degré 1.
Autrement dit, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ la factorisation de P s'écrit

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2}...(X - a_k)^{\alpha_k}.$$

où a_1, a_2,...a_k sont les racines de P et α_1, α_2,...,α_k leur multiplicité respective.

Théorème 6 (Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif.
Autrement dit, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ la factorisation de P s'écrit

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2}...(X - a_k)^{\alpha_k} Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}.$$

où a_1, a_2,...a_k sont les racines réelles distinctes de α_1, α_2,...,α_k leur multiplicité respective et les Q_i, $i = 1, ..., s$ sont les polynômes irréductibles de degré 2 de la forme

$$Q_i = X^2 + b_i X + c_i \text{ où } \Delta = b_i^2 - 4c_i.$$

Proposition 15 (Racines complexe de $\mathbb{R}[X]$)

Soient P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$ une racine de P alors son conjugué $\overline{a}$ est également une racine de P.

5.7 Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{C}[X]$

5.7.1 Formule de Taylor

Théorème 7 (Formule de Taylor)

Soient P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et $a \in \mathbb{C}$, alors

$$P = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{P''(a)}{2!}(X - a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}}{n!}(X - a)^n.$$

FIGURE 5.2 – Brook Taylor (1685 - 1731), mathématicien britannique à l'origine en autre de ce que l'on appelle les formules de Taylor.

Remarque
La formule reste valable pour les polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Faisons un bref retour sur les racines multiples d'un polynômes avec la proposition suivante dont la preuve peut se faire en se servant de la formule de Taylor.

Proposition 16 (Racines multiples et dérivée)

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. L'élément a est une racine exactement d'ordre $k \leq n$ de P si et seulement si a est une racine de P, P', ... et P^{k-1} mais pas de P^k.

Donnons finalement deux résultats, l'un sur la division suivant les puissances croissantes.

Proposition 17 (Division puissances croissantes)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $n \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors il existe un couple (Q_n, S_n) unique de polynômes vérifiant la double condition

$$\begin{cases} A & = & BQ_n + X^{n+1}S_n, \\ d^\circ Q_n & < & n. \end{cases}$$

Et un résultat sur les relations entre les racines et les coefficients.

Proposition 18 (Relation racines et coefficients)

Soit $P = \lambda(X-\lambda_1)...(X-\lambda_n) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ avec $a_n \neq 0$, un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ (en écrivant α fois chaque racine multiple d'ordre α) alors pour tout p, tel que $1 \leq p \leq n$,

$$\sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}...\lambda_{i_p} = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}$$

En particulier

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n=1} \lambda_i\lambda_j = -\frac{a_{n-2}}{a_n},\ \sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Remarque
Si $n = 3$ par exemple,
$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$,
$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Deuxième partie

Partie B

Chapitre 1

Ensembles et fonctions

Les vieux mathématiciens ne meurent pas ; ils perdent juste certaines de leurs fonctions.

Populaire

Sommaire

(a) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), mathématicien allemand, à l'origine entre autres du calcul infinitésimal (avec Newton), fut le premier à introduire le terme de fonctions.

(b) Leonhard Euler (1707 - 1783), mathématicien suisse a travaillé également sur le calcul infinitésimal et entre autres choses sur la théorie des graphes. C'est à lui que l'on doit la notation f pour les fonctions.

(c) Nicolas Bourbaki est un mathématicien imaginaire créé par un groupe de mathématiciens 1935 à Besse-et-Saint-Anastaise (France). A l'origine de nombreuses notations, vulgarisation de notions et de symbole, on leur doit entre autres la distinction entre fonction et application.

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des fonctions.

Lorsque l'on travaille dans les mathématiques appliquées par exemple, que ce soit en physique, chimie, biologie ou autres, la notion de fonction est très importante.
En **biologie** par exemple, on s'en servirait pour décrire l'évolution d'une population de poissons en fonction du temps. Suivant certaines propriétés, cette population pourrait augmenter dans le cas où la nourriture est suffisamment abondante, ou décroître si jamais il y avait trop de prédateurs (notamment des pêcheurs en surabondance). Connaître les propriétés de cette fonction permettrait de prédire le déclin ou la prospérité de l'espèce de poisson étudiée (comme le cas du cabillaud pêché en Atlantique nord (voir figure ci-dessous)).
En **physique**, nous pourrions nous intéresser par exemple à la trajectoire d'un objet ou d'une personne : comme un skieur lancé du haut d'une rampe. Trouver les conditions optimales pour qu'il puisse sauter le plus loin possible lui permettrait de gagner la compétition.
Les exemples d'applications se comptent par milliers autour de nous. Nous sommes entourés de fonctions, certains l'ignorent, d'autres non. Plus vous ferez des mathématiques, et plus vous vous en rendrez compte.
Mais, afin que les études soient le plus rigoureuses possibles, il est nécessaire de bien maîtriser les outils mathématiques utilisés, en l'occurrence ici les fonctions.
Le nom de fonction (du latin *functio*, accomplissement ou exécution) est apparu assez tard, en 1694 dans un manuscrit de Gottfried Leibniz alors que la notion existait depuis beaucoup plus de temps. C'est ensuite Leonhard Euler qui propose la notation f pour les fonctions en 1734 (après plusieurs tentatives plus ou moins convaincantes par d'autres mathématiciens).
En ce qui nous concerne, nous aborderons ici les fonctions et les applications dans le cadre le plus simple (les plus élaborées se verront dans les semestres suivants, notamment en analyse 3) : ce sont les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelle.
Qu'est-ce que cela veut dire ? Comment les définit-on ? Comment les manipule-t-on ? Quelles sont les fonctions les plus connues ? En somme, que savons-nous des fonctions ?

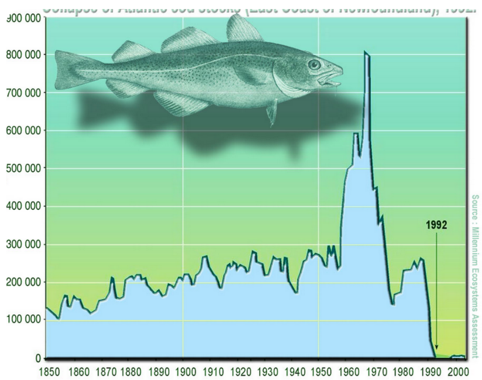


FIGURE 1.2 – Evolution du stock de cabillaud au cours du siècle dernier.

1.1 Fonctions

On considère ici deux ensembles I et J inclus dans $\mathbb{R}$. Ces ensembles peuvent être $\mathbb{R}$ lui-même.

Définition 1 (Fonction)

Soient I et $J \subset \mathbb{R}$.
Une **fonction** $f : I \to J$ est la donnée, pour tout élément x de I, d'un élément $f(x)$ de J. On dit que I est le **domaine de définition** de la fonction f ; il est souvent noté $\mathscr{D}_f$.

On utilisera également le mot "application" comme synonyme de "fonction".

Notation 1.1
On note les fonctions de la façon suivante :

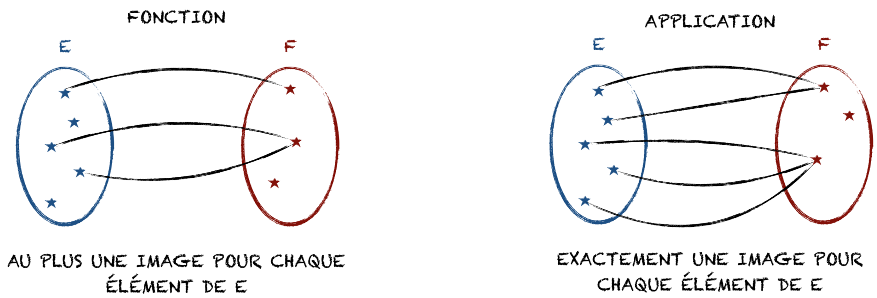
$$\begin{array}{rccl} f: & I & \to & J \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Attention *: dans chacune de ces définitions,*

1. *la première flèche reliant I à J qui s'écrit $\to$ sans barre verticale à l'extrémité gauche se lit : "dans" (f va de I dans J).*
2. *la deuxième flèche reliant x à $f(x)$ possède, elle une barre verticale à l'extrémité gauche et se lit : "a pour image" (x a pour image $f(x)$).*

Remarque

1. *Comme dit précédemment, l'élément x dans l'ensemble $\mathscr{D}_f$ est appelé **antécédent** de f, et l'élément $f(x)$ est appelé **image** de x par f.*
2. *Ainsi, l'antécédent se trouve dans le domaine de définition, et l'image dans l'ensemble d'arrivée.*



(a) Représentation d'une fonction. (b) Représentation d'une application.

FIGURE 1.3 – Exemple de fonction et d'application.

Notation 1 (Ensemble des applications)

L'ensemble de toutes les application de I dans J est noté J^I

Nous pouvons maintenant essayer de tracer ces applications. Les courbes représentant ces applications, appelées également graphes, permettent de les visualiser plus facilement dans un repère en deux dimensions. Pour cela nous avons besoin de définir le graphe d'une application.

Définition 2 (Image directe)

Considérons une application $f : I \to J$, où $I, J \subset \mathbb{R}$. Pour toute partie A de I, on appelle **image directe** de A par f l'ensemble $\{f(x) : \ x \in A\}$ noté $f(A)$ ou $f < A >$.

Définition 3 (Image réciproque)

Considérons une application $f : I \to J$, où $I, J \subset \mathbb{R}$. Pour toute partie B de J, on appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble $\{x \in I : \ f(x) \in B\}$ noté $f^{-1}(B)$.

Remarque ***Attention :***

1. *La notation f^{-1} est assez dangereuse ! Les étudiants ont tendance à confondre l'image réciproque $f^{-1}(B)$ avec l'application réciproque qui s'écrit juste f^{-1}. La première désigne un ensemble, la deuxième une application !*

2. *Nous verrons ci-dessous qu'il faut que f soit bijective pour que l'application f^{-1} existe, alors que l'ensemble $f^{-1}(B)$ existe même si f n'est pas bijective.*
3. *Les images directes et réciproques d'ensembles par les applications sont des ensembles, il ne faut pas l'oublier !*

Proposition 1 (Propriété des images directes et réciproques)

Soit $f : I \to J$ une application. Soient $A \subset I$ et $B \subset J$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$,
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$,
3. Soient A_1 et $A_2 \subset I$, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
4. Soient A_1 et $A_2 \subset I$, $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
5. Soient B_1 et $B_2 \subset J$, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Remarque *Concernant la propriété (3), nous verrons dans la sections suivante (proposition 5) qu'il faut que f ait une propriété supplémentaire pour avoir l'égalité, et pas seulement l'inclusion.*

Définition 4 (Graphe d'une application)

Le graphe, appelé encore courbe représentative, noté $\mathscr{C}_f$ d'une application $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à $\mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ appartienne à $J \subset \mathbb{R}$.

Remarque *Le graphe de f s'écrit en général de la façon suivante :*

$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x));\ \ x \in \mathscr{D}_f\}.$$

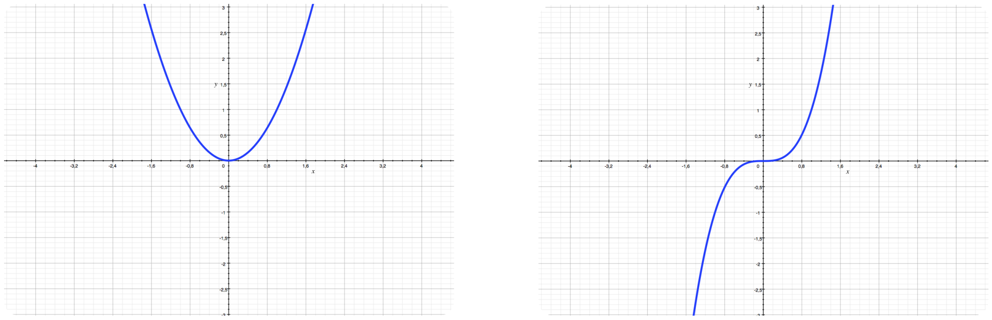
Remarque *IMPORTANT : il ne faudra pas confondre :*

1. *f qui désigne la **fonction** (ou l'application),*
2. *$f(x)$ qui désigne un **nombre réel** (l'image de x par f),*
3. *$\mathscr{C}_f$ qui désigne le graphe de f, autrement une représentation de f dans un repère, c'est une partie du plan.*

***Il ne faudra donc pas dire** : soit $f(x)$ la fonction ! Mais soit f la fonction...*

Exemple *Voici dans les figures suivantes, le graphe de deux fonctions usuelles (que l'on étudiera un peu plus loin dans le chapitre) :*

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ 2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$



(a) Fonction $x \mapsto x^2$ (b) Fonction $x \mapsto x^3$

FIGURE 1.4 – Deux fonctions classiques.

1.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité sont nouvelles pour la plupart d'entre vous. Mais elles ne sont pas compliquées quand on comprend ce qu'elles représentent.
Considérons une application f définie d'un ensemble I de $\mathbb{R}$ vers un ensemble J de R. On rappelle alors que I représente l'ensemble de départ et J l'ensemble d'arrivée.

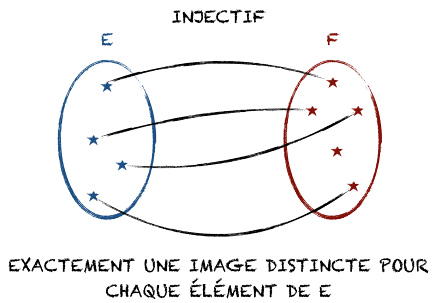
Définition 5 (Application injective)

On dit qu'une application $f : I \to J$ est **injective** si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au plus un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit aucun mais pas plus de un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tous x_1 et x_2 de I,

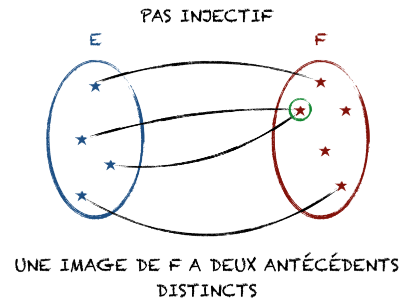
$$\text{si } f(x_1) = f(x_2) \text{ alors } x_1 = x_2.$$

Nous pouvons également la définir par sa **contraposée**, qui est :
pour tous x_1 et x_2 de I,

$$\text{si } x_1 \neq x_2, \text{ alors } f(x_1) \neq f(x_2).$$



(a) Injection.



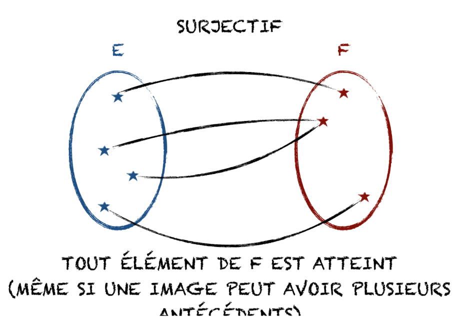
(b) Non injection

FIGURE 1.5 – Concept d'injection (à gauche) et de non injection (à droite).

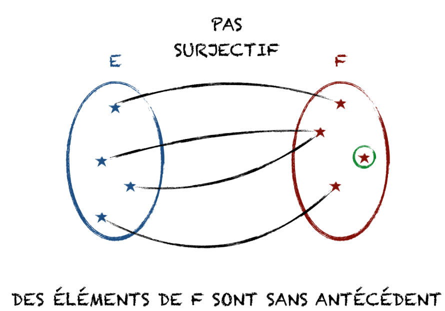
Définition 6 (Application surjective)

On dit qu'une application $f : I \to J$ est **surjective** si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au moins un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit plus, mais il est obligé d'en posséder un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe (au moins un) x de I tel que

$$f(x) = y.$$



(a) Surjection.



(b) Non surjection

FIGURE 1.6 – Concept de surjection (à gauche) et de non surjection (à droite).

Remarque *Nous avons de façon équivalente la définition de la surjectivité suivante :*
Soit $f = I \to J$ *une application,*

$$f \text{ est surjective si et seulement si } f(I) = J.$$

Définition 7 (Application bijective)

On dit qu'une application $f : I \to J$ est **bijective** si et seulement elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet exactement un antécédent dans l'ensemble I de départ.
En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe un unique x de I tel que

$$f(x) = y.$$

Il est alors possible de passer de y à x par ce qu'on appelle l'application réciproque, que l'on note f^{-1}. Et donc si f est bijective on a :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & y = f(x), \end{array} \quad \text{et} \quad f^{-1}: \begin{array}{ccc} J & \to & I \\ y & \mapsto & x = f^{-1}(y), \end{array}$$

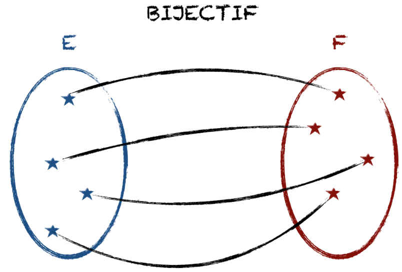


FIGURE 1.7 – Concept de bijection.

Remarque *On pourrait considérer les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité comme la réservation de places dans un avion.*
Ce que le passager aime, c'est avoir de la place à droite et à gauche et donc des places vides. Donc il espère que des places dans l'avion n'auront pas été prises. C'est l'injectivité : si l'on désigne au hasard des places dans l'avion, certaines seront occupées d'autres non. On peut alors faire entrer complètement la liste des passagers (ou l'injecter si on peut oser la métaphore) dans l'avion.
D'un autre côté, ce que la compagnie aérienne souhaite, c'est de vendre plus de billet que de places disponibles. Autrement dit, elle pourra éventuellement se trouver en grande difficulté si tous les passagers se présente : c'est le surbooking qu'on pourrait appeler surjection ici. Autrement dit, si l'on fait rentrer tout le monde dans l'avion, chaque place pourra être occupée par un ou plusieurs passager (ne me demandez pas comment). Mais aucun siège

ne sera vide. La surjection dans le cas de l'aviation commerciale peut s'avérer être un jeu dangereux mais rentable.
Enfin, la condition idéale est quand l'avion est plein, que chaque place est prise par un unique passager. Toutes les places ont été vendues, et chaque passager a son espace personnel. Tout le monde semble satisfait.

FIGURE 1.8 – Solution pour éviter le surbooking : augmenter le nombre de siège et réduire la place pour les jambes ?...Le prix pour passer de la surjectivité à la bijectivité ?

Question.
Comment construire le graphe d'une application f^{-1} réciproque d'une application f ?
Réponse.
On voit par construction de l'application réciproque que si l'on suppose x un point de l'intervalle I et y un point de l'intervalle $J = f(I)$ l'image de I par f tel que $y = f(x)$, alors

$$(x, y) \text{ appartient au graphe } \mathscr{C}_f \text{ si et seulement si } (y, x) \text{ appartient au graphe } \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

Autrement dit tout point du graphe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la première bissectrice (c'est à dire la droite d'équation $y = x$), voir la figure 1.9.

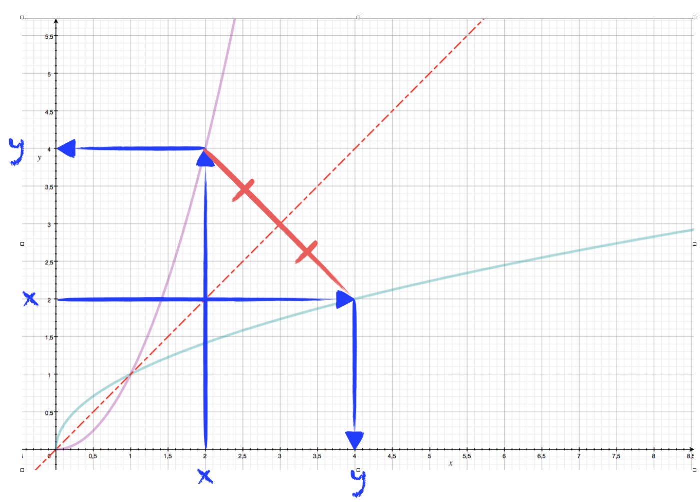


FIGURE 1.9 – Construction de l'application réciproque (ici l'application $x \mapsto x^2$ dont la réciproque si $x \geq 0$ est $x \mapsto \sqrt{x}$. La droite pointillée rouge est la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

1.3 Composition d'applications

Cette partie est nouvelle mais pas très difficile à comprendre. Elle concerne l'"emboîtement" d'applications les unes dans les autres. Un peu comme des poupées russes. On nomme cet "emboîtement" la composition d'applications.

FIGURE 1.10 – Exemple de poupées russes "façon petit chaperon rouge". Dans la définition suivante f sera l'action de manger la poire, et donnera le chaperon rouge et g sera l'action de manger le petit chaperon rouge ce qui donne le loup.

Définition 8 (Applications composées)

Soient I, J et K trois ensembles, $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux applications. Nous appelons application composée de g et de f, l'application $g \circ f : I \to K$ définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque ***Attention :***
Il y a deux difficultés dans la composition d'applications :

1. *bien faire attention de ne pas confondre $f \circ g(x) = f(g(x))$, et $g \circ f(x) = g(f(x))$ qui sont différents,*
2. *faire bien attention aux ensembles de départs I et J. En effet, pour $g \circ f$, l'ensemble de départ I doit être inclus dans le domaine de définition de f mais pas seulement ! Il faut également que l'image directe de I par f soit inclus dans le domaine de définition de g !*

Définition 9 (Application identité)

Soit I un ensemble, on appelle identité de I l'application $Id_I : I \to I$ définie pour tout $x \in I$ par

$$Id_I(x) = x.$$

Proposition 2 (Application réciproque : existence)

Soit $f : I \to J$ une application. Cette application f est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : J \to J$ telle

$$g \circ f = Id_I \text{ et } f \circ g = Id_J.$$

et cette application g est unique.

Remarque

Notation : *Si $f : I \to J$ est une bijection, sa bijection réciproque est unique et nous la notons f^{-1}.*

Proposition 3 (Réciproque d'une application réciproque)

Soit $f : I \to J$ une bijection, alors f^{-1}, sa bijection réciproque est également une bijection, de bijection réciproque f. Autrement dit,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Proposition 4 (Propriété de la bijection)

Soit $f : I \to J$ une bijection, alors

$$y = f(x) \text{ est équivalent à } x = f^{-1}(y).$$

Remarque

Nous verrons qu'une application continue et strictement croissante (ou décroissante) sur I est une bijection de I vers $f(I)$.

Revenons quelques instants sur les images réciproques d'applications et donnons la propriété suivante relative à la propriété (3) de la proposition 1

Proposition 5 (Image directe et injectivité)

Soit $f : I \to J$ une application. Soient A_1 et $A_2 \subset I$. Qi f est injective, nous avons l'égalité suivante :

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

1.4 Ensembles finis

Définition 10 (Cardinal)

Un ensemble I est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de I vers $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le **cardinal** de I. C'est le nombre d'éléments de I et on le note card(I).

Exemple

1. *L'ensemble* $I = \{bleu, blanc, rouge\}$ *est en bijection avec* $\{1, 2, 3\}$ *et donc de cardinal* 3.
2. $\mathbb{N}$ *n'est pas un ensemble fini.*

Proposition 6 (Propriétés des cardinaux)

1. Le cardinal de l'ensemble vide est 0, autrement dit card($\emptyset$)$= 0$.
2. Si A est un ensemble fini, et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et card(B)$\leq$ card(A).
3. Si A et B sont des ensembles finis disjoints (c'est à dire que $A \cap B = \emptyset$) alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

4. Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors card($A \backslash B$)= card(A)- card(B).
5. En particulier, si $B \subset A$ et card(A)=card(B) alors $A = B$.
6. Si A et B sont deux ensembles finis quelconques, alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Donnons maintenant quelques propriétés relatives aux injections, surjections et bijections dans les ensembles finis.

Proposition 7 (Cardinaux et applications)

Soient I, J deux ensembles finis, et $fI \rightarrow J$ un application. Nous avons les propriétés suivantes :

1. si f est injective alors card(I)$\leq$ card(J),
2. si f est surjective alors card(I)$\geq$ card(J),
3. si f est bijective alors card(I)$=$ card(J).

Nous avons également le résultat suivant

Proposition 8 (Cardinaux bijection)

Soient I, J deux ensembles finis, et $fI \rightarrow J$ un application. Si card(I)$=$ card(J) alors les assertions suivantes sont équivalents :

1. f est injective,
2. f est surjective,
3. f est bijective.

Nous pouvons également dénombrer le nombre d'applications par la proposition suivante :

Proposition 9 (Nombre d'applications)

Soient I, J deux ensembles finis non vides, on note card(I)$=n$ et card(J)$=p$, alors

1. le **nombre d'applications différentes** de I dans J est p^n.
2. le **nombre d'injections** de I dans J est $p \times (p-1) \times ... \times (p-(n-1))$.
3. le **nombre de bijections** de I dans J est $n!$

Chapitre 2

Pratiques sur les fonctions (applications) usuelles

La science est l'asymptote de la vérité. Elle l'approche sans cesse, et ne la touche jamais.

Victor Hugo

Sommaire

(a) John Napier (en français Neper) (1550-1617), mathématicien écossais a donné son nom au logarithme népérien qu'il a élaboré avec des tables de correspondances.

(b) Christian Huygens (1629-1695), mathématicien néerlandais, fait le lien entre la primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ et le logarithme népérien.

(c) Vincenzo Riccati (1707 - 1775), mathématicien italien fut l'un des premiers à étudier les fonctions hyperboliques.

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés au logarithme népérien et aux fonctions hyperboliques.

Dans tout ce chapitre, nous ne ferons pas vraiment la distinction entre fonction et application, même si la plupart du temps, nous définirons les fonctions sur leur domaine de définition.
Nous allons dans ce chapitre présenter les fonctions les plus connues (qui pourraient sembler nouvelles pour certains d'entre vous). Ces fonctions ainsi que leurs propriétés sont à connaître par cœur. Nous donnerons quelques propriétés essentielles de ces fonctions (notamment leur comportement asymptotique).
Nous donnerons aussi quelques résultats "intuitifs" sur les limites des fonctions, et leurs dérivées sans avoir défini encore ces concepts (ce qui se fera dans un chapitre suivant).
Avant de présenter les fonctions "classiques" commençons donner quelques propriétés générales et nous les appliquerons sur les fonctions usuelles.

2.1 Quelques propriétés des fonctions

Par abus, dans tout ce qui suit (sauf dans des cas particuliers) nous allons parler de fonctions plutôt que d'applications. Ceci afin de ne pas alourdir les propos et de permettre de donner un cadre général aux propriétés. Toutefois, on gardera en tête qu'il suffira de définir l'ensemble de départ comme étant le domaine de définition pour que le résultat s'applique aux applications. Nous allons donner ici quelques propriétés connues, et d'autres moins connues sur les fonctions. Ces propriétés permettront de décomposer des fonctions un peu compliquées en fonctions connues plus simples.

2.1.1 Les opérations algébriques

Commençons par les opérations connues : somme, produit et division de fonctions.

Définition 1 (Opérations sur les fonctions)

Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a alors les résultats suivant :

1. **Somme** : la fonction somme $f + g$ est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
2. **Produit** : la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
3. **Quotient** : lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie pour tout réel x de I par :
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque *Il est important de rappeler que l'on ne peut pas diviser par 0 et donc il faudra absolument que le domaine de définition de g comprenne entre autre le fait que $g(x)$ ne s'annule pas pour x dans ce domaine.*

2.1.2 La restriction

Il se peut que de temps à autre, nous n'ayons pas besoin d'étudier une applications sur tout son domaine de définition, mais seulement sur une partie. On restreint alors la fonction sur un intervalle plus petit que son domaine de définition.

Définition 2 (Restriction)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle **restriction** de f à I_0 que l'on note $f|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par :
$$\text{pour tout } x \in I_0,\ f|_{I_0}(x) = f(x).$$

Remarque *Cette définition signifie juste que les fonctions f et $f|_{I_0}$ prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'intervalle I_0.*

2.1.3 Fonctions définies par morceaux

L'image de la fonction que l'on avait jusqu'à maintenant est celle d'une courbe assez régulière que l'on peut dessiner à main levée sans trop de problème. Il se peut en fait qu'une fonction soit définie par des petits morceaux que l'on peut rapiécer Ces morceaux de fonctions peuvent se toucher ou non suivant ce que l'on étudie.
Si l'on considère par exemple un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient plusieurs sous intervalles I_1, I_2, ..., I_n (où n est un entier naturel). On suppose que ces intervalles ne se chevauchent pas, sinon nous aurions des problèmes, nous ne serions pas en présence de fonctions dans un cadre général. Ces intervalles peuvent se toucher en découpant ainsi l'intervalle I en n sous intervalles ou non. Supposons qu'en chacun de ces sous-intervalles la fonction f possède une expression différente. Autrement dit, en reprenant la notation de la restriction de la section précédente nous aurions :

$$f|I_1 = f_1,\ f|I_2 = f_2,...,f|I_n = f_n.$$

La fonction ainsi définie serait une fonction par morceaux (voir exemple sur la figure 2.2).

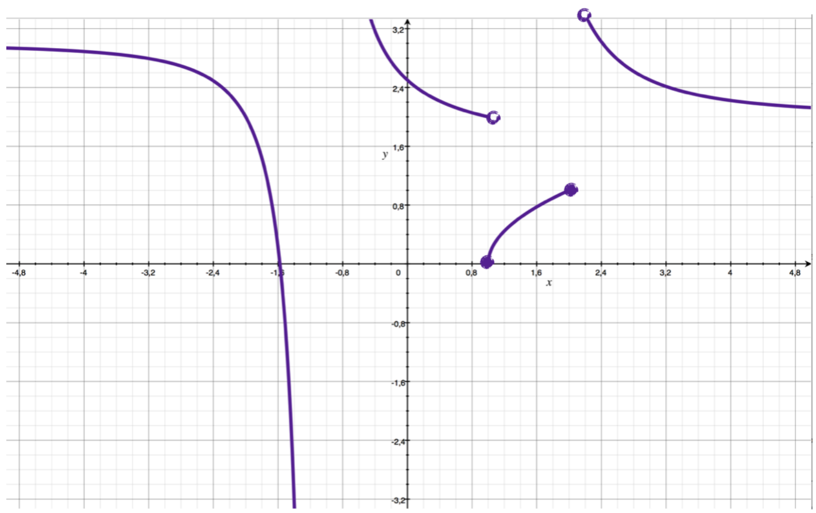


FIGURE 2.2 – Exemple de fonction définie par morceaux.

2.1.4 Dérivabilité, opérations algébriques et composition

Rappelons la définition de la dérivée (que nous détaillerons plus dans le chapitre sur la dérivation)

Définition 3 (Dérivée en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On dit que f est dérivable en a si la fonction suivante (appelée taux d'accroissement),

$$\begin{array}{rccl} g: & I-\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, \end{array}$$

possède une limite finie l au point a.
Dans ce cas là, on note la limite l de la façon suivante :

$$l = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Ce nombre $f'(a)$ est appelé dérivée de f en a.

Remarque

Une interprétation de la dérivée est la suivante. Le rapport

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

représente la pente de la droite sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$, tandis que le nombre $f'(a)$ représente la pente de la tangente du graphe $\mathscr{C}_f$ au point a.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(a, f(a))$ est alors

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Proposition 1 (dérivée opérations algébriques)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I.

1. Si f et g sont dérivables en a, la fonction $f+g$ est dérivable en a et on a
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. Si f et g sont dérivables en a, la fonction fg est dérivable en a et on a
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Si f et g sont dérivables en a, avec $g(a) \neq 0$ la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Proposition 2 (dérivée d'une fonction composée)

Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans J, et g une fonction définie sur J à valeurs dans K (I, J et K étant des intervalles de $\mathbb{R}$).
Si f est dérivable en a, un élément de I, et si g est dérivable en $f(a)$ un élément de J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Remarque *Lorsqu'on dérive des fonctions composées on peut faire une analogie avec des poupées russes. Les fonctions dans la composition s'emboîtent les unes dans les autres. Et lorsque l'on dérive cette composition de fonctions, cela revient à enlever les poupées les unes après les autres. Et chaque fois qu'on en retire une on la dérive au point correspondant à l'intérieur des poupées encore rangées que l'on n'a pas encore touchées.*

Une des conséquences de la proposition précédente est la dérivée de la réciproque d'une fonction.

Proposition 3 (dérivée d'une fonction réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Proposition 4 (dérivée d'une fonction réciproque sur I)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

2.1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Il se peut que l'on ait besoin de savoir de temps en temps si une fonction peut-être majorée ou minorée (on pourrait par exemple chercher le coût minimum ou maximum d'une opération financière). Pour cela nous devons définir les notions suivantes.

Définition 4 (Fonction majorée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel M, la fonction f est dite **majorée** (par M) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \leq M.$$

Définition 5 (Fonction minorée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel m, la fonction f est dite **minorée** (par m) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \geq m.$$

Définition 6 (Fonction bornée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 1 (Valeur absolue et fonction bornée)

Soit f une fonction définie sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction f est bornée sur I si la fonction

$$|f| : x \mapsto |f(x)| \text{ est majorée.}$$

Remarque *La majoration ou la minoration de f peuvent ne pas exister. Elles peuvent également ne pas être unique. Il suffit de trouver un majorant ou un minorant qui marche. Si ce majorant (ou minorant) est le plus petit des majorants (ou plus grand des minorants), ça peut être soit la borne supérieure (ou inférieure), soit le maximum (ou le minimum) de la fonction. Tout dépend en fait de l'appartenance ou non de ce majorant ou minorant dans l'intervalle d'arrivée.*

Quelques fois, ce n'est pas un nombre qui majore (ou minore) une fonction. Il se peut que ce soit carrément une autre fonction. Nous avons alors les définitions suivantes.

Définition 7 (Fonction majorée par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f majore g si pour tout x de I :

$$f(x) \geq g(x).$$

On écrit alors $f \geq g$.

Définition 8 (Fonction minorée par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f minore g si pour tout x de I :

$$f(x) \leq g(x).$$

On écrit alors $f \leq g$.

2.1.6 Monotonie

Certaines fonctions sont monotones, dans le sens littéral du terme. Autrement dit, elles ne varient pas. Elles sont soit croissantes, soit décroissantes sur un intervalle fixé. C'est ce que nous allons définir ici.

Définition 9 (Croissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Définition 10 (Décroissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Définition 11 (Croissance stricte)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 < x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Définition 12 (Stricte décroissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 < x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

De façon générale nous avons la définition de la monotonie suivante.

Définition 13 (Monotonie)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.

Définition 14 (Monotonie stricte)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement monotone** sur I si elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque *Etudier les variations d'une application consiste donc à regarder sa variation de monotonie et donc à partager son ensemble de définitions en intervalles tels que sur chacun d'eux, la fonction soit monotone.*

Nous verrons dans le chapitre sur la dérivation ue si une fonction est dérivable sur un intervalle I inclus dans son domaine de définition, alors sa monotonie est donnée par le signe de sa dérivée de la façon suivante (nous montrerons ces résultats dans le chapitre de la dérivation).

Proposition 5 (dérivée d'une fonction constante)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée f' est identiquement nulle sur I.

Proposition 6 (dérivée et monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors

1. f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I.
2. f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I.
3. f est strictement croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.
4. f est strictement décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

On synthétise alors les résultats obtenus dans un tableau de variations (voir un exemple dans la figure 2.3).

Définition 15 (Tableau de variations)

Afin de rassembler les informations concernant les variations d'une fonction, on utilise un tableau de variation dans lequel la croissance est représentée par une flèche vers le haut, la décroissance par une flèche vers le vas. On y indique également les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2.3 – Exemple de tableau de variation pour la fonction $f : x \mapsto x^2$. Remarquez que l'on note dans la deuxième ligne, variation de f et non de $f(x)$. On cherche en effet les variations de la fonction f, tandis que $f(x)$ est un nombre !

Voyons quelques propriétés relatives à la monotonie.

Propriété 2 (Somme, produit et composition de fonctions monotones)

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. Si f et g sont croissantes sur I, la somme $f+g$ est croissante.
2. Si f et g sont positives ou nulles sur I. Si f et g sont croissantes sur I, alors leur produit fg est croissant sur I.
3. Si f et g sont croissantes toutes le deux, ou décroissantes toutes les deux alors leur composée (si elle existe), est croissante.
4. Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, alors la composée est décroissante.

Rappelons que la composée de fonction est définie de la façon suivante (voir le chapitre 1 dans la section 1.3) :

Définition 16 (Applications composées)

Soient I, J et K trois ensembles, $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions. Nous appelons fonction composée de g et de f, la fonction $g \circ f : I \to K$ définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & I & \overset{f}{\to} & J & \overset{g}{\to} & K \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Nous allons également nous en servir dans la section sur la dérivation de fonctions.

2.1.7 Parité

Il sera très utile parfois de regarder si notre fonction (et donc son graphe) est symétrique soit par rapport à l'origine 0 soit par rapport à l'axe des ordonnées (c'est à dire la droite d'équation $x = 0$). En effet, cela nous permettra de n'étudier la fonction que sur une partie de son domaine, l'autre partie se déduisant par symétrie. C'est extrêmement pratique notamment quand on utilisera des valeurs absolues.
Pour cela nous devons définir la parité d'une fonction.

Définition 17 (Fonction paire)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$ (l'intervalle I doit être symétriquement réparti autour de 0) . L'application est dite **paire** si pour tout réel x de I nous avons

$$f(-x) = f(x).$$

Définition 18 (Fonction impaire)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$ (l'intervalle I doit être symétriquement réparti autour de 0) . L'application est dite **impaire** si pour tout réel x de I nous avons

$$f(-x) = -f(x).$$

Remarque *Si f est paire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'axe de des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$)*

Remarque *Si f est impaire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'origine O.*

Remarque *IMPORTANT : si $0 \in I$, toute application $f : I \to \mathbb{R}$ impaire s'annule en 0. Autrement dit, si f est impaire $f(0) = 0$.*

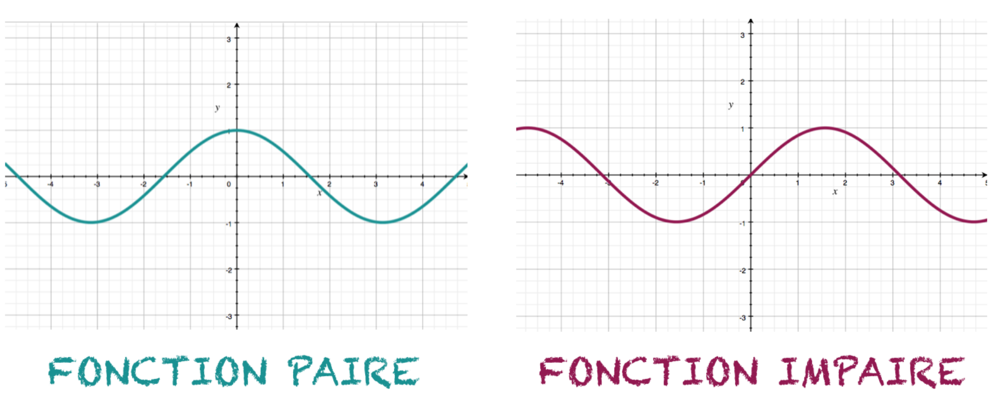


FIGURE 2.4 – Exemple de fonction paire (à gauche) et impaire (à droite).

Il se peut que l'axe de symétrie ne soit pas l'axe des ordonnées. La fonction ne sera alors pas paire, mais juste symétrique par rapport à un autre axe. Supposons que ce soit la droite verticale d'équation $x = a$. Nous avons alors la propriété suivante.

Propriété 3 (Axe de symétrie quelconque)

Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel de I tel que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathscr{C}_f$ de f admet commet la droite d'équation $x = a$ pour **axe de symétrie** si et seulement si pour tout réel x :

$$f(a + x) = f(a - x).$$

Il se peut que le centre de symétrie ne soit par l'origine. Dans ce cas, la propriété suivante nous permet de prouver qu'un point A de coordonnées (a, b) du plan est un centre de symétrie pour l'application f.

Propriété 4 (Centre de symétrie quelconque)

Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et b deux réels tels que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathscr{C}_f$ de l'application f admet le point A de coordonnées (a, b) pour **centre de symétrie** si et seulement si pour tout réel x de I

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b.$$

2.1.8 Fonctions périodiques

Penchons-nous maintenant sur les fonctions périodiques. Montrer qu'une fonction est périodique peut être très utile, dans le sens où, un peu comme dans le cas de la parité, cela permet de réduire fortement le domaine d'étude de la fonction, en l'occurrence ici sur une seule période.

Définition 19 (Fonction périodique)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit T un nombre réel non nul tel que pour tout x de I l'on ait :

$$x + T \text{ dans l'intervalle } I.$$

L'application f est dite **T-périodique** si pour tout réel x de I :

$$f(x+T) = f(x).$$

T est alors appelé la période de f.

Remarque *Si f est une application périodique et si T et T' sont deux périodes de f telles que $T + T' \neq 0$, alors $-T$ et $T + T'$ sont également des périodes de f.*

f peut donc posséder plusieurs périodes de f. La plus petite d'entre elle est appelée **période fondamentale**.

Définition 20 (Période fondamentale)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. On suppose f périodique. Si l'ensemble des périodes strictement positives de f a un plus petit élément T_0, celui-ci est appelé **période fondamentale** de f. Toutes les périodes de f sont alors de la forme nT_0, où n est un entier relatif.

2.1.9 Fonctions convexe

Rappelons tout d'abord la description paramétrique d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (en fonction d'un paramètre t).

Proposition 7 (Segment)

Soient $a, b \in\subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, alors,

$$x \in [a, b] \text{ si et seulement s'il existe un unique } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = ta + (1-t)b.$$

Nous pouvons alors définir la notion de fonction convexe.

Définition 21 (Fonction convexe)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est **convexe** si pour tous x_1 et $x_2 \in I$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ pour tout } t \in [0,1]$$

Remarque

1. *La fonction f est dite* ***concave*** *si $-f$ est convexe.*
2. *Si le graphe $\mathscr{C}_f$ de f passe par les points $A(x_1, f_(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$ alors le point $(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)x_2)$, avec $t \in [0,1]$ appartient au segment $[A, B]$.*

Proposition 8 (Fonction convexe : critère)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est **convexe** si et seulement si pour tous a et $b \in I$, avec $a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 9 (Fonction convexe : dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f' est croissante sur I alors f est convexe et pour tous $x, a \in I$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Remarque

L'inégalité de la dernière proposition signifie que le graphe $\mathscr{C}_f$ se trouve " au-dessus" de toutes ses tangentes.

Proposition 10 (Fonction convexe : dérivée seconde)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est convexe.

Définition 22 (Point d'inflexion)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Si $f''(a) \geq 0$ pour un point $a \in I$, et pour tous x_1, x_2 dans I et dans un voisinage de a, $f''(x_1).f''(x_2) < 0$, alors on dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$. alors f est convexe.

2.1.10 Asymptotes

Définition 23 (Asymptotes)

Soit $I \in \mathbb{R}$ et Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de graphes respectifs $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Soit $\alpha = \{-\infty, a, +\infty\}$, où $a \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to \alpha}(f(x) - g(x)) = 0$ on dit que les graphes sont asymptotes.

Remarque

En général, nous étudierons

1. *les asymptotes horizontales (quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) quand*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ où } b \in \mathbb{R} \text{ est fini.}$$

2. *les asymptotes verticales quand*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ est fini.}$$

3. *les asymptotes obliques quand*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Proposition 11 (Asymptote oblique)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, où $I = [x_0, +\infty[\in \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, si

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, et
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b$,

alors la droite d'équation $= ax + b$ est asymptote au graphe $\mathscr{C}_f$ de f.

Exemple
Soit $f :]1, +\infty[$ *définie pour tout* $x \in]1, +\infty[$ *par*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ *et* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - 2x = 1$ *alors la droite d'équation* $= 2x + 1$ *est asymptote au graphe* $\mathscr{C}_f$ *de* f *(voir figure 2.5).*

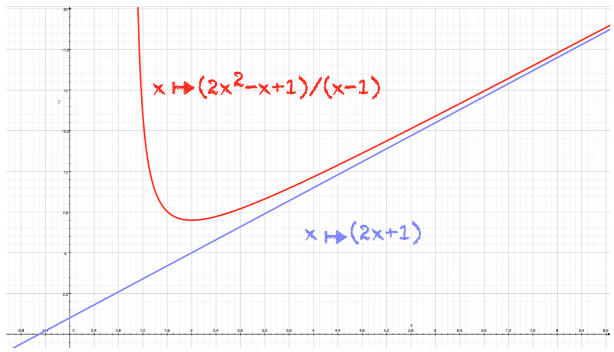


FIGURE 2.5 – Exemple d'asymptote oblique.

2.2 Fonctions usuelles

2.2.1 Fonction constante

La fonction constante (voir représentation sur la figure 2.6) est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a, \end{array}$$

où a est un nombre réel.
On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = a.$$

2.2.2 Fonction identité

La fonction identité est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Id: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

La fonction identité n'est rien d'autre qu'une fonction linéaire de la forme $f(x) = mx$ dont le coefficient directeur m vaut 1.
On rappelle au passage qu'en déplaçant la fonction linéaire $x \mapsto mx$ de p unités (vers le haut si p est positif ou vers le bas si p est négatif), on obtient la fonction affine $x \mapsto mx + p$. On peut montrer assez facilement que

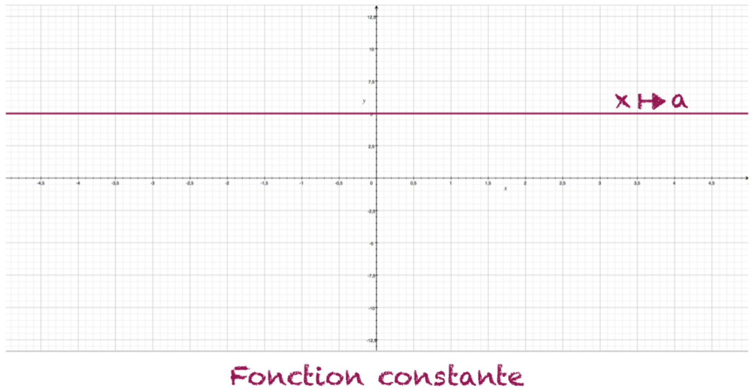


FIGURE 2.6 – Représentation de la fonction constante.

$$\lim_{x \mapsto +\infty} Id(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} Id(x) = -\infty.$$

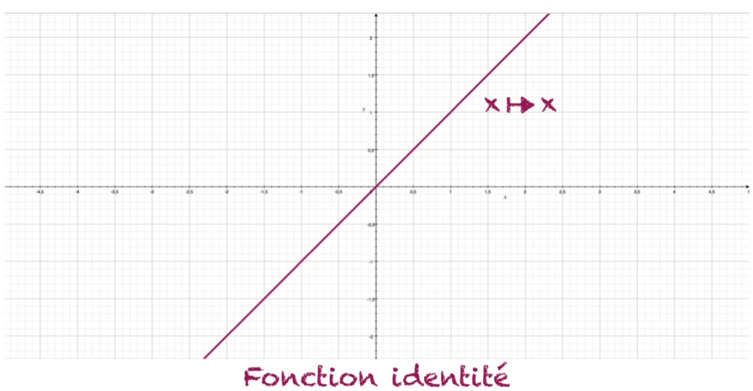


FIGURE 2.7 – Représentation de la fonction identité.

2.2.3 Fonction valeur absolue

Pour un rappelle sur les propriétés des valeurs absolues d'un nombre, il n'est pas inutile de relire la section (1.4.3). Ici, nous ne nous intéressons qu'à la fonction valeur absolue.
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x\mapsto+\infty}|x| = \lim_{x\mapsto-\infty}|x| = +\infty.$$

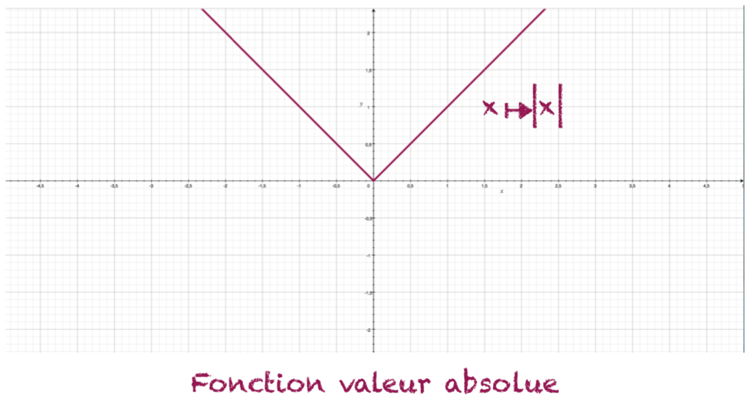


FIGURE 2.8 – Représentation de la fonction valeur absolue.

2.2.4 Fonction partie entière

Cette fonction peut-être nouvelle pour certains d'entre vous. C'est la fonction partie entière. Pour la définition et les propriétés de la partie entière, il ne sera pas inutile de revoir sa définition.

La partie entière a beaucoup d'applications notamment en probabilité, en théorie des nombres mais également dans l'affichage numérique d'appareils de mesures. Elle pourra également nous être utile pour la résolution d'exercices ainsi que pour la preuve de certaines propositions.

Définition 24 (Partie entière)

Soit a un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à a s'appelle la partie entière de a. Nous le noterons $E(a)$ ou $[a]$. Autrement dit,

$$E(a) \leq a < E(a) + 1.$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $E(a) \in \mathbb{Z}$.

Remarque *Intuitivement, il est assez aisé de voir que pour les nombre positifs, la partie entière d'un nombre est le nombre lui-même "coupé" de ses chiffres après la virgule. D'où*

le nom de partie entière.
Par contre pour les nombres négatifs, il faudra faire attention, ce sera le nombre entière inférieur au nombre "coupé" de ses chiffres après la virgule.
Il ne faut donc pas confondre partie entière et troncature ! (la partie entière est la troncature pour les nombres positifs, mais pas pour les nombres négatifs !

Exemple

1. $E(\pi) = 3$,
2. $E(-\pi) = -4$.

La fonction partie entière que l'on note E est la fonction définie par :

$$E : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x). \end{array}$$

La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est constante sur tous les intervalles du type $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer sur le graphe de la partie entière que sa représentation n'est

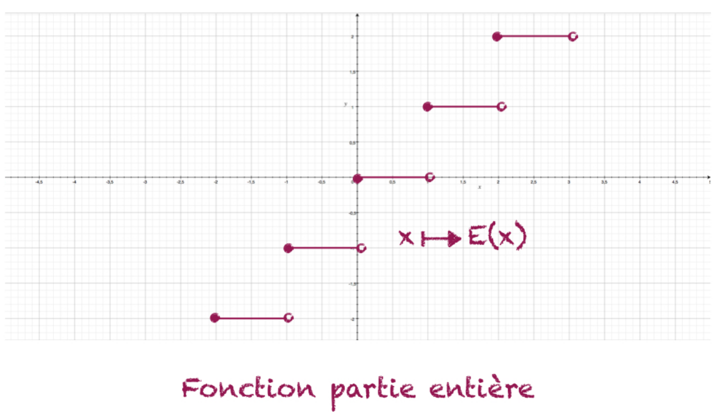


FIGURE 2.9 – Représentation de la fonction partie entière.

pas en " un seul morceau". On dira dans le prochain chapitre que la fonction partie entière est continue par morceaux.

2.2.5 Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$

Commençons par rappeler la définition de la puissance entière d'un nombre réel a.

Définition 25 (Puissance entière)

Soient a un réel non nul et n un entier naturel. La puissance n-ième de a est définie par :

$$a^n = a \times a \times a \times ... \times a \text{ (où } a \text{ est multiplié } n \text{ fois).}$$

Notons que si $n = 0$, $a^0 = 1$.

Il est important de noter que cette fonction est définie pour tout réel a. Ce sera important pour donner le domaine de définition de cette fonction.
Continuons par quelques propriétés des puissances entières d'un nombre réel a.

Propriété 5 (Opérations puissances entières)

Soient a, b des nombres réels et n, p deux entiers naturels. On a les propriétés suivantes :

$$a^n a^p = a^{n+p}, \quad (a^n)^p = a^{np}, \quad a^n b^n = (ab)^n,$$

et si en plus b est non nul :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ et } b^n = \frac{1}{b^{-n}}.$$

Remarque *Grâce à ce qui précède on peut généraliser les propriétés à n et p entier relatifs, en faisant attention à chaque fois que pour a^n, avec $n \in \mathbb{Z}$, si la puissance de a est négative, le nombre a ne doit pas être nul, car on ne peut pas diviser par 0 (on ne le répètera jamais assez).*

La fonction puissance entière peut donc être définie de la façon suivante pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Remarque

1. *Si $n = 0$ on retrouve la fonction constante définie plus haut.*
2. *Si $n = 1$ on retrouve la fonction identité Id définie plus haut.*
3. *Si n est pair, la fonction f est paire.*
4. *Si f est impaire, la fonction f est impaire.*
5. *Si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ (c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 0).*
6. *Si $n = -1$ on retrouve la fonction inverse classique :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-1} = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

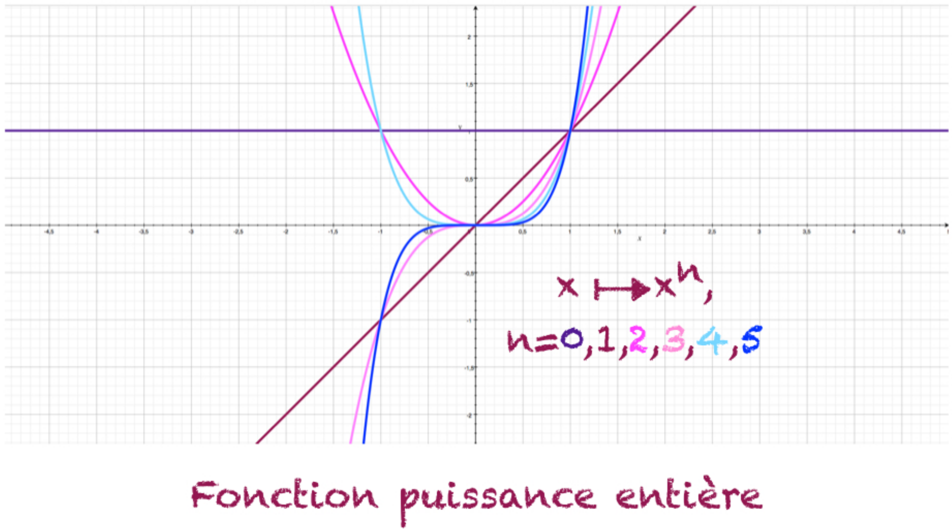


FIGURE 2.10 – Représentation de la fonction puissance entière.

2.2.6 Fonction polynôme

Si l'on considère les puissances entières positives. Nous pouvons faire la somme de plusieurs fonctions puissances entières, qui donnent alors naissance à la fonction polynôme (plusieurs puissances).
On la définit en général avec la lettre p (pour l'initiale de polynôme) de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \end{array}$$

où les a_0, a_1, ..., a_n sont des réels (qui peuvent être nuls) appelés coefficients du polynôme.

Remarque *L'écriture $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ peut se simplifier en utilisant le symbole de la somme de plusieurs éléments en mathématique de la façon suivante :*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

qu'on lit : “somme de $i = 1$ à n de $a_i x^i$”. C'est écriture est beaucoup plus pratique, elle permet d'éviter de surcharger les calculs.

2.2.7 Fonction racine n-ième, puissance rationnelle

Il se peut que la puissance ne soit pas entière. Elle peut alors être rationnelle. Autrement dit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour éviter les cas particuliers, nous définirons la puissance rationnelle (ou puissance fractionnaire) pour a **un réel strictement positif** :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Remarque

1. *Noter que si $p = 1$ et $q = 2$ on obtient $\sqrt{a}$ et $a > 0$ qui est la racine carrée comme nous la connaissons (mais définie seulement pour $a > 0$).*
2. *Noter que si $p = 1$ et $q = 3$ on obtient $\sqrt[3]{a}$, et $a > 0$ qui est la racine cubique que nous connaissons également (et qui peut être définie sur $\mathbb{R}$).*
3. *Noter que ce n'est pas toujours nécessaire de prendre $a > 0$, mais pour la définition générale d'une puissance rationnelle nous prendrons toujours a dans $\mathbb{R}_+^*$. Sinon il faudra faire attention au rapport $\dfrac{p}{q}$ qui doit écrit de façon irréductible. Alors seulement dans ce cas, si q est impair on peut définir $a^{\frac{p}{q}}$ pour $a \in \mathbb{R}$.*
4. *Notons enfin que si p est négatif, il faut également prendre en compte le fait que a ne doit pas être nul (sinon on diviserait par 0).*

On peut alors définir la fonction racine n-ième de la façon suivante :
- Si n est pair :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}, \end{array}$$

- Si n est impair :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

Et d'un autre côté la fonction puissance rationnelle (pour n'importe quels $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{p}{q}}. \end{array}$$

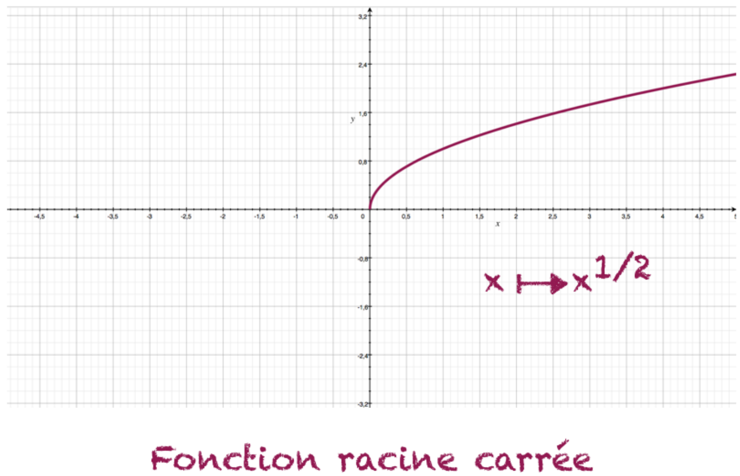


FIGURE 2.11 – Représentation de la fonction racine carrée.

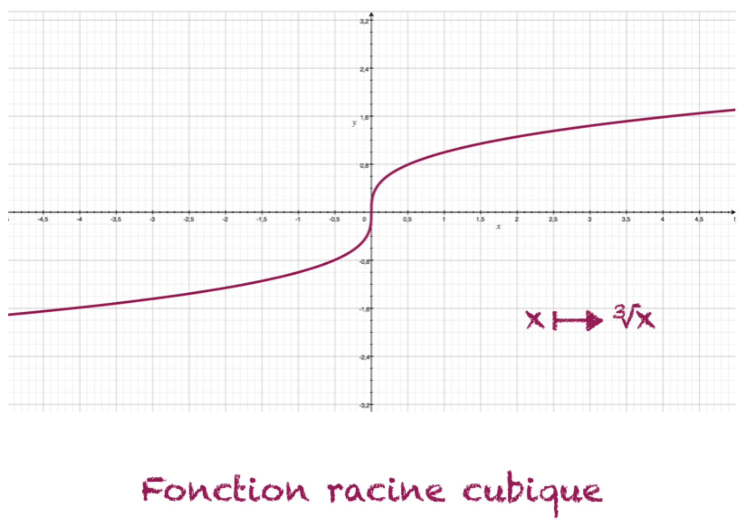


FIGURE 2.12 – Représentation de la fonction racine cubique.

2.3 Fonction homographique

On pourrait penser que les fonctions fonctions homographiques s'appellent ainsi parce qu'elles possèdent toutes la même (*homo* en latin) forme de graphe. Mais c'est en fait un peu plus compliqué que ça. Pour faire simple, dans le plan complexe ce sont des fonctions qui transforment des figures en ces mêmes figures (comme des cercles en cercles, ou des droites en droites...). Mais nous ne développerons pas plus loin cet aspect.
Les fonctions homographiques sont connues depuis le lycée, nous ne faisons que rappeler leur définition ici :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{d}{c}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d}, \end{array}$$

où a, b, c et d sont des réels et c n'est pas nul (sinon on aurait des fonctions affines classiques).

Bien faire attention là aussi à l'ensemble de définition.
En appliquant le chapitre précédent au calcul des limites de ce type de fonctions, nous pouvons observer que leur graphe comporte deux asymptotes :
- une asymptote verticale qui a pour équation $x = -\dfrac{d}{c}$,
- une asymptote horizontale qui a pour équation $y = \dfrac{a}{c}$.
D'autre part, en appliquant les résultats de la section (2.1.7), il est possible de prouver que ces graphes possèdent un centre de symétrie que l'on laisse le soin au lecteur de calculer (ce qui pourrait faire l'objet d'un exercice pas trop difficile).

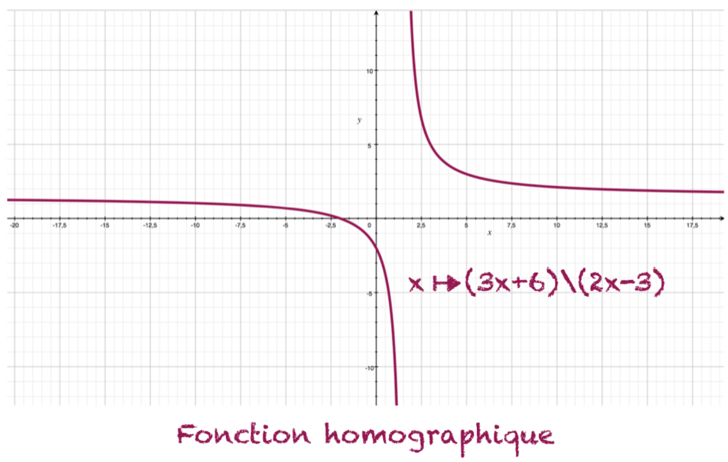


FIGURE 2.13 – Représentation de la fonction homographique.

2.4 Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien (notée $\ln$) est connue depuis la terminale. Cette fonction peut être construite de plusieurs façon :
-comme étant une primitive de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (c'est même en fait l'intégrale entre 1 et x de la fonction inverse) (mais nous n'avons pas encore abordé la notion de primitive ni celle de l'intégrale, cela se fera au prochain semestre),
- comme la réciproque de la fonction exponentielle (que nous allons introduire juste après cette section, qui elle-même peut être construite à partir des suites (les suites que l'on verra dans le chapitre(**??**)).
Nous laissons donc pour l'instant la construction de cette fonction de côté.
Nous allons juste rappeler cette fonction $\ln$ ici, ainsi que quelques propriétés essentielles.
La fonction $\ln$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

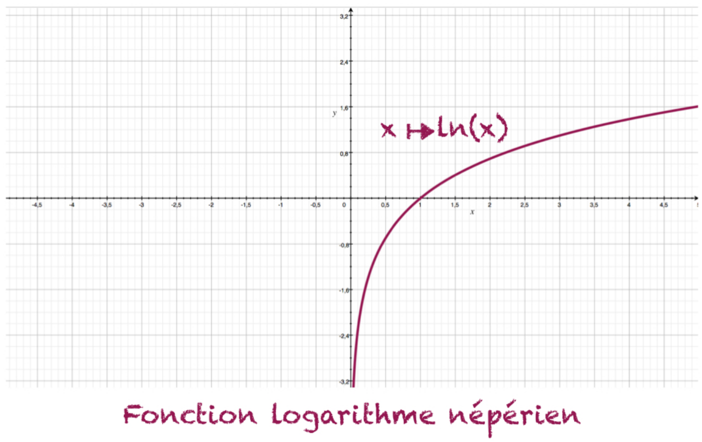


FIGURE 2.14 – Représentation de la fonction logarithme népérien.

Il est important de noter ici aussi le domaine de définition de cette fonction.

Cette fonction possède de nombreuses propriétés qu'il n'est pas inutile de rappeler ci-dessous.

Propriété 6 (Logarithme népérien)

1. Il existe un nombre $e \simeq 2,71828$ tel que $\ln(e) = 1$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs, alors
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b).$$
Cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$) que $\ln(1) = 0$.
3. Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors :
$$\ln(a^n) = n\ln(a), \quad \text{et} \quad \ln(a^{-n}) = -n\ln(a).$$

Les résultats sur les limites liées à la fonction $\ln$ sont également à connaître et à savoir redémontrer.

Propriété 7 (Limites et Logarithme népérien)

Soit x réel strictement positif,

$$\lim_{x\to+0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

mais également

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0, \text{ pour } p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Il sera utile quelques fois de connaître les logarithme de base 10 (en général pour des applications en physique, chimie ou biologie), et donc plus généralement les logarithmes de base a où a est un réel strictement positif.

Définition 26 (Logarithme de base a)

Soient a un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $\log_a(x)$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque *Le logarithme népérien* $\ln$ *est le logarithme de base* e*, c'est celui que l'on utilisera le plus souvent, et c'est celui qui est le plus simple, que l'on croise le plus naturellement (même si historiquement ce n'est pas celui-là qui a été utilisé en premier par John Napier (ou Neper) en 1614 qui à donné son nom à cette fonction). C'est pour cela qu'on l'appelle aussi logarithme naturel (celui-ci est dû à Nicolaus Mercator (en 1668)).*

2.5 Fonction exponentielle

Intimement liée à la fonction $\ln$ (c'est sa fonction réciproque), la fonction exponentielle est définie comme suit :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

Il est important de se rappeler que la fonction exponentielle reste toujours strictement positive. Cela sera très utile de le savoir tout au long de ce semestre. Elle possède, entre autres, les propriétés suivantes :

Propriété 8 (Exponentielle)

1. Pour tous réels a et b,

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

2. Pour tout réel a et pour tout entier naturel n

$$(e^a)^n = e^{na}, \quad (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{na}}.$$

3. Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b

$$e^{\ln a} = a, \ \ \ln(e^a) = a \quad \text{et} \quad e^{b \ln a} = a^b.$$

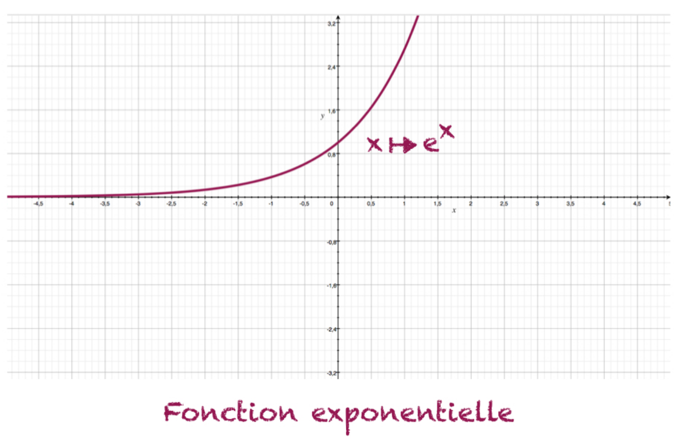


FIGURE 2.15 – Représentation de la fonction exponentielle.

Remarque

1. *Le 3. de la propriété précédente permet de définir la puissance quelconque d'un réel strictement positif* a^b*, où* a *est un réel strictement positif et* b *est un réel quelconque. Et les propriétés des puissances rationnelles marchent encore pour des puissances quelconques si on les définit pour un réel* a *strictement positif.*
2. *On peut également définir la fonction puissance quelconque (ou fonction puissance "non entière") de la façon suivante :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha, \end{array}$$

où α est un nombre réel quelconque.

On a alors les limites suivantes (que l'on appelle croissances comparées) (c'est à dire que l'on étudie la vitesse de croissance de certaines fonctions par rapport à d'autres)

Propriété 9 (Limites et exponentielles)

Soit x réel. On a alors les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+a)^x}{x} = e^a, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Soit α un réel strictement positif, Soit β un réel quelconque. On a alors les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{-\alpha}} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0.$$

2.6 Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

La trigonométrie est connue depuis le collège. Les formules avec sinus, cosinus et tangente sont à connaître par cœur (voir fiche de rappel à la fin de cette section).
Ici nous ne nous intéressons qu'aux fonctions et non pas aux formules. Nous avons :

2.6.1 Fonction sinus

La fonction sinus est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

2.6.2 Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

2.6.3 Fonction tangente

La fonction tangente est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rlcl} \tan : & \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$

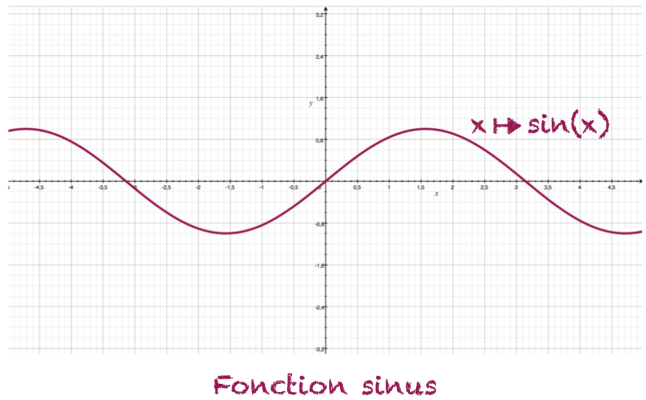


FIGURE 2.16 – Représentation de la fonction sinus.

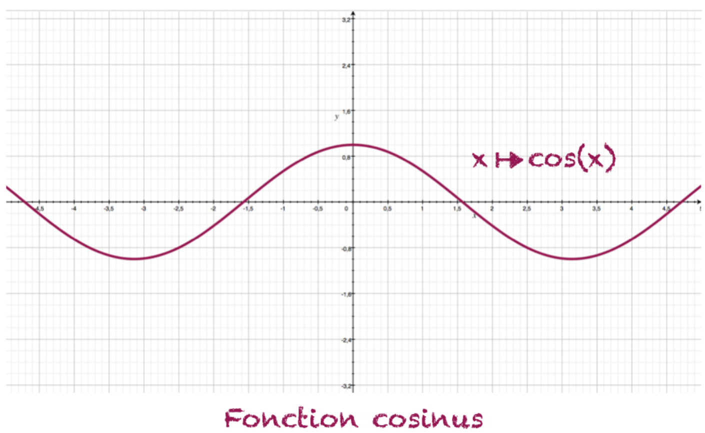


FIGURE 2.17 – Représentation de la fonction cosinus.

2.6.4 Fonction cotangente

La fonction cotangente est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rlcl} \text{cotan}: & \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}, k\in\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$

Remarque *Nous verrons dans la prochaine section quelques propriétés des fonctions réciproques de ces fonctions trigonométriques.*

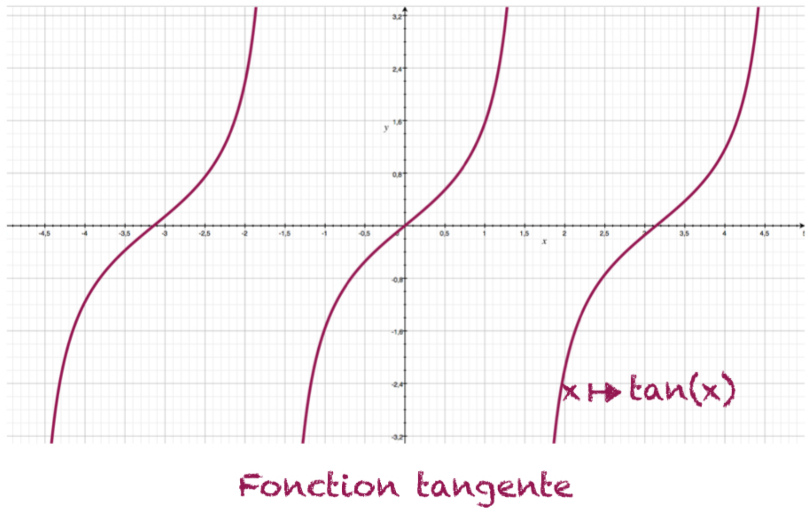


FIGURE 2.18 – Représentation de la fonction tangente.

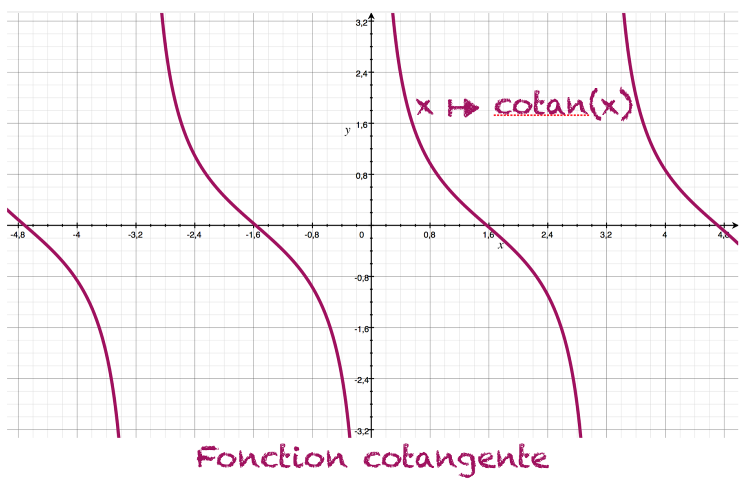


FIGURE 2.19 – Représentation de la fonction cotangente.

2.7 Fonctions hyperboliques

Ces fonctions sont peut-être nouvelles pour certains d'entre vous. Elles sont très utilisées dans les applications pratiques. Ce sont des combinaisons de fonctions exponentielles qui ont des propriétés assez similaires aux fonctions trigonométriques.
Nous donnerons quelques propriétés de ces fonctions à la fin de cette section.

2.7.1 Fonction cosinus hyperbolique

Le graphe de la fonction ch (que l'on va décrire ci-dessous) sur $\mathbb{R}$ décrit une chaînette appelée également vélaire, ou caténaire. De façon très concrète, il représente la forme d'un câble fixé aux deux extrémités et soumis à la pesanteur. Historiquement, l'arc de parabole semblait la forme la plus intuitive pour décrire la forme prise par un fil flexible pendant entre deux supports, c'est du moins ce que pensait Galilée. Mais, très vite, deux scientifiques : Joachim Jung en 1627 d'un côté, et Christian Huygens en 1646 de l'autre apportèrent la preuve du contraire.
Il faudra cependant attendre 1691 pour que simultanément, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens, sous l'impulsion d'un défi lancé par Jacques Bernoulli (le frère de Jean), démontrent que la forme exacte est une chaînette (nom donné par Huygens dans une lettre adressée à Leibniz). C'est cette fonction ainsi que ses cousines appartenant à la même branche de ce que l'on appelle les "fonctions hyperboliques" qui trouveront une multitude d'applications en physique (notamment en architecture) et en biologie que nous allons étudier.
La fonction cosinus hyperbolique notée ch est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{ch} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

La fonction ch est une fonction paire.

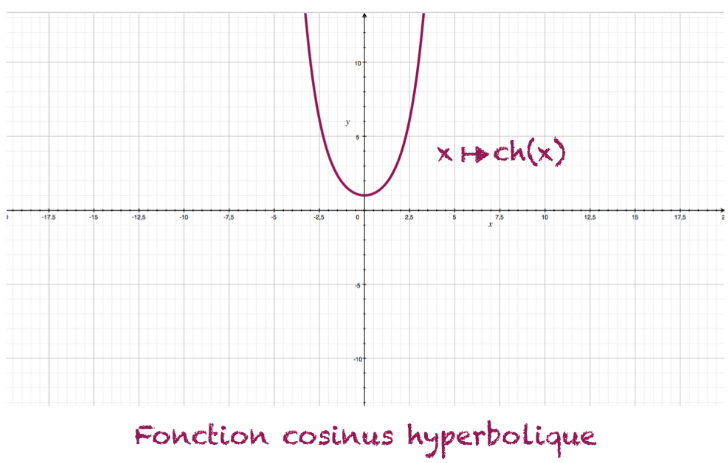


FIGURE 2.20 – Représentation de la fonction cosinus hyperbolique.

2.7.2 Fonction sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{sh} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

La fonction sh est une fonction impaire.

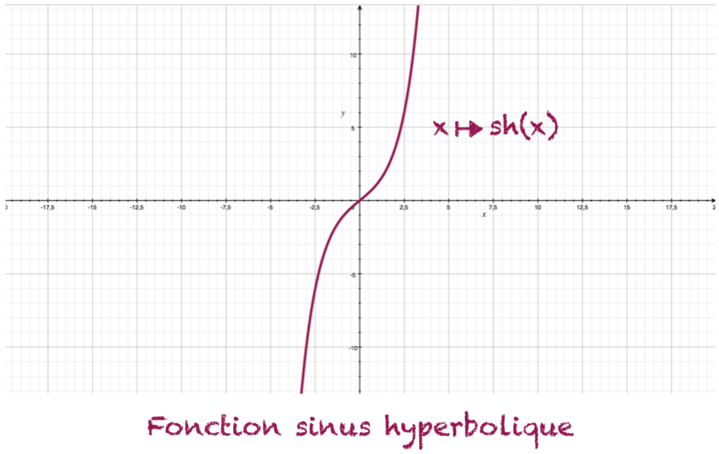


FIGURE 2.21 – Représentation de la fonction sinus hyperbolique.

2.7.3 Fonction tangente hyperbolique

La fonction tangent hyperbolique notée th est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{th} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}. \end{array}$$

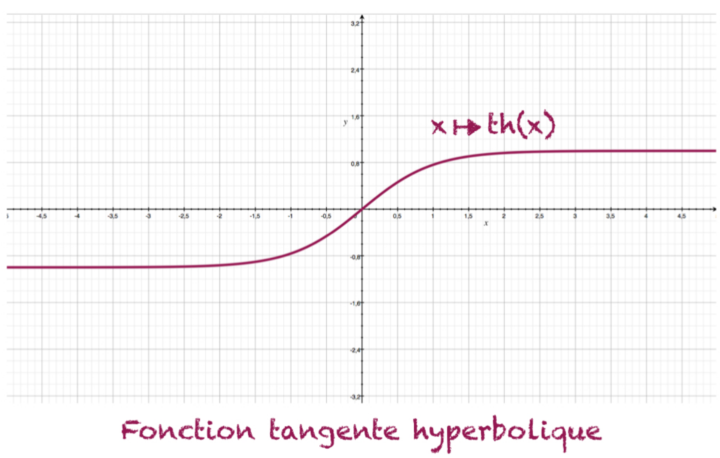


FIGURE 2.22 – Représentation de la fonction tangente hyperbolique.

2.7.4 Fonction cotangente hyperbolique

La fonction cotangente hyperbolique notée coth est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{coth} : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{coth}(x) = \dfrac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}. \end{array}$$

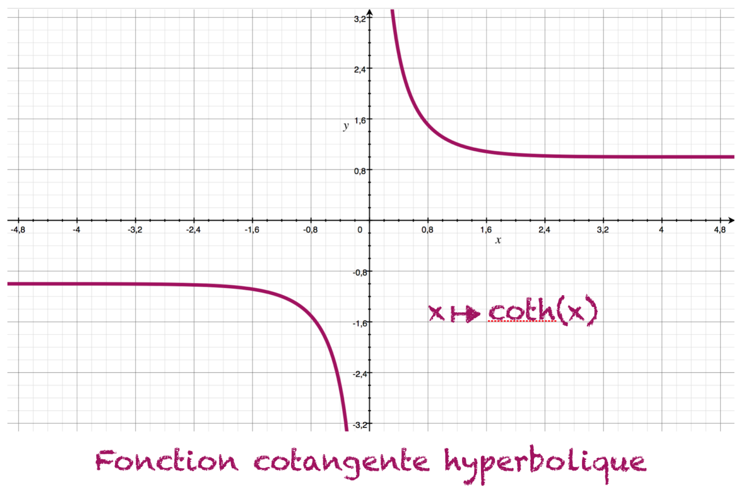


FIGURE 2.23 – Représentation de la fonction cotangente hyperbolique.

Remarque *Nous verrons dans la prochaine section quelques propriétés des fonctions réciproques de ces fonctions.*

Par construction, nous avons les formules suivantes.

Propriété 10 (Egalités hyperboliques)

Soit x un nombre réel. Alors on a :

1. $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$.
2. $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$.
3. $\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$.

2.8 Dérivées des fonctions usuelles

Commençons par donner les dérivées qui sont supposées être connues depuis le Lycée et donc, supposées être parfaitement maîtrisées non seulement par leurs formulation mais également leur domaine de définition.

Propriété 11 (Dérivée des fonctions puissance)

La dérivée des fonctions puissance est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	a $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	x^n $(n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Viennent ensuite les dérivées qui sont nouvelles cette année. Leurs valeurs sont importantes à connaître, surtout lorsque l'on abordera le chapitre sur les équations différentielles avec les dérivées mais également les primitives des fonctions usuelles à connaître. Encore une fois, les ensembles de définitions sont aussi important que les formulations des dérivées.

Propriété 12 (Dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique)

La dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}^2(x)$
$\mathbb{R}^*$	$\text{coth}(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{\text{sh}(x)^2} = 1 - \text{coth}^2(x)$

Propriété 13 (Dérivée des fonctions trigonométriques)

La dérivée des fonctions trigonométriques est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\text{cotan}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x)$

Chapitre 3

Suites réelles

Une suite de petites volontés fait un gros résultat.

Charles Baudelaire

Sommaire

(a) Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), mathématicien français, qui a établi entre autres chose un critère de convergence des suites qui porte son nom.

(b) Leonardo Fibonacci ($\simeq$ 1175 - $\simeq$ 1250), un mathématicien italien également appelé Léonard de Pise, est connu pour la suite qui porte son nom et qu'il a introduite dans le *Liber Abaci* (Le livre des calculs) en 1202.

(c) Blaise Pascal (1623- 1662), mathématicien français, décrivit dans le "traité du triangle arithmétique" en 1654 ce qui allait être le raisonnement par récurrence comme on l'entend de nos jours.

FIGURE 3.1 – Quelques mathématiciens célèbres ayant contribué à l'élaboration et l'étude de la théorie sur les suites.

Un cas particulier de fonctions, est les suites. C'est un cas particulier dans le sens où l'ensemble de départ n'est pas réel mais dans les entiers naturels.
Ce chapitre est dédié à l'étude des suites numériques qui seront à valeurs dans les réels. Certains résultats seront valables pour les complexes mais nous resterons ici dans les réels.

3.1 Définition

Définition 1 (Suites réelles)

On appelle **suite** réelle toute **application**

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \right. .$$

On note une telle application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque *On appellera aussi suite les applications dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.*

On peut définir les suites de deux façons différentes.

1. Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = f(n),$$

c'est ce qu'on appelle une formulation **explicite** de la suite.

2. Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 = a. \end{cases}$$

c'est ce qu'on appelle une **formulation par récurrence**.

3.2 Deux suites classiques

Il existe deux suites classiques que l'on rencontrera assez souvent. Les suites arithmétiques et les suites géométriques.

3.2.1 Suites arithmétiques

Définition 2 (Suite arithmétique)

On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = a + u_n.$$

3.2.2 Suites géométrique

Définition 3 (Suite géométrique)

On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = ru_n.$$

Il est possible de donner la formulation explicite de chacune de ces suites grâce à la proposition suivante.

Proposition 1 (Formulation explicite suites arithmétiques et géométriques)

1. Le terme général d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 est
$$u_n = u_0 + na.$$
2. Le terme général d'une suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 est
$$u_n = u_0 r^n.$$

3.2.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 4 (Suite arithmético-géométrique)

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $a, r \in \mathbb{R}$ appelé raisons de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = a + ru_n.$$

Remarque

1. *Si $r = 1$, nous retrouvons la suite arithmétique.*
2. *si $a = 0$, nous retrouvons la suite géométrique.*

Proposition 2 (Formulation explicite suites arithmético-géométriques)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Le terme général d'une suite arithmético-géométrique de raisons a et r de premier terme u_0 est
$$u_n = \frac{a}{1-r} + r^n(u_0 - \frac{a}{1-r}).$$

3.3 Récurrence d'ordre 2

Il se peut que l'on définisse les suites par une récurrence d'ordre supérieure à 1 comme formulée dans la section précédente. Un cas particulier que l'on va étudier est la récurrence d'ordre 2 (dans le cas le plus simple, le cas linéaire).

Définition 5 (Récurrence d'ordre 2)

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formulation récurrente linéaire d'ordre 2 s'écrit de la façon suivante

$$\begin{cases} u_{n+1} = bu_n + cu_{n-1} \\ u_0 = a_0, \quad u_1 = a_1, \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où b, c, a_0 et a_1 sont des réels donnés.

Remarque *Nous pouvons exprimer cette suite de la façon suivante (ce qui est équivalent)*

$$\begin{cases} au_{n+2} + bu_n + cu_n = 0 \\ u_0 = a_0, \quad u_1 = a_1, \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$. Nous retombons alors sur la définition précédente avec b qui s'écrit $-b/a$ et c qui s'écrit $-c/a$.

Si nous considérons de la définition précédente, nous pouvons introduite l'équation caractéristique correspondante.

Définition 6 (Récurrence d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formulation récurrente linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} u_{n+1} = bu_n + cu_{n-1} \\ u_0 = a_0, \quad u_1 = a_1, \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où b, c, a_0 et a_1 sont des réels donnés, on définit son équation caractéristique de la façon suivante

$$r^2 - br - c = 0.$$

Pour calculer explicitement le terme général de toute suite définie par des récurrences linéaires d'ordre 2, l'idée est de chercher des suites géométriques de raison r satisfaisant cette récurrence. La raison vérifie alors l'équation caractéristique

$$r^2 - br - c = 0.$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 3 (Formulation explicite suites récurrentes d'ordre 2)

1. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n,$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.
2. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 1 solution réelle $r_0 \neq 0$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n,$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.
3. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos(n\theta) + \lambda_2 \rho^n \sin(n\theta),$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.

Exemple *Un exemple classique est la suite de Fibonacci où $b = c = 1$, si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.*

3.4 Limite de suites

3.4.1 Introduction

Définition 7 (Limite finie d'une suite)

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on dit que la suite est convergente (on dit aussi qu'elle converge vers l).
S'il n'existe pas de $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite est divergente.
Et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Remarque

1. *Une suite divergente peut admettre une limite infinie ou ne pas avoir de limite du tout.*
2. *On a les équivalences suivantes*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

Proposition 4 (Unicité de la limite)

La limite $l \in \mathbb{R}$ d'une suite réelle, si elle existe est unique.

Définition 8 (Limite infinie d'une suite)

1. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \geq M.$$
2. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ si et seulement si pour tout $M < 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \leq M.$$

Proposition 5 (Suite majorée et minorée à partir d'un certain rang)

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie, et

1. s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n < M,$$
(on dit que la suite est majorée par M à partir d'un certain rang) alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $-\infty$ soit $l \in]-\infty, M]$.
2. s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n > M,$$
(on dit que la suite est minorée par M à partir d'un certain rang) alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $+\infty$ soit $l \in [M, +\infty[$.

Remarque *Il est important de remarquer ici que dans le cas la limite finie, une inégalité stricte sur le terme général de la suite entraîne seulement une inégalité large sur la limite !*

Définition 9 (Suite majorée, minorée et bornée)

1. On dit qu'une suite est majorée si et seulement s' il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On dit qu'une suite est minorée si et seulement s' il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Propriété 1 (Convergence et suite bornée)

Toute suite convergente est une suite bornée.

Remarque *Attention, la réciproque de la propriété précédente est fausse !*

Remarque *Pour que tout soit bien clair, il paraît nécessaire de faire le point sur un peu de vocabulaire : en effet, il ne faut pas confondre suite convergente et suite qui admet une limite. Nous allons le décrire dans le tableau qui suit.*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge	*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$diverge*	
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie l	*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet l'∞ comme limite*	*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite*
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie		
convergence	*divergence de première espèce*	*divergence de deuxième espèce*

3.4.2 Opération algébriques sur les limites

A l'instar de ce qui a été dit sur les limites de fonctions, les résultats d'opérations sur les limites de suites sont analogues.

Limite d'une somme de suites

Propriété 2 (Limite de somme)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite de la somme des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l_1	l_2	l_1+l_2
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Limite d'un produit de suites

Propriété 3 (Limite de produit)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite du produit des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	0	0
0	∞	**Forme indéterminée**

Limite d'un quotient de suites

Propriété 4 (Limite de quotient)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite du quotient des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$
l_1	$l_2(\neq 0)$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	**Forme indéterminée**
0	0	**Forme indéterminée**

3.4.3 Résultats sur les limites de suites

Toujours de façon analogue aux résultats sur les fonctions, nous avons des résultats sur les comparaisons de suites, ainsi que le théorème des gendarmes pour les suites.

Proposition 6 (Comparaison suites et limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$u_n \leq v_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$v_n \leq u_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Proposition 7 (Limite positive)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergence telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \geq 0$.

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ (finie ou infinie) et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$u_n \leq v_n \leq w_n,$$

alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Nous avons également le résultat suivant qui pourra s'avérer très utile pour certaines preuves dans les exercices rencontrés.

Proposition 8 (Recollement)

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

ont même limite l (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l.

Remarque *Il est important de faire attention dans cet énoncé au fait que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient la même limite. Si ce n'est pas le cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

3.5 Suites réelles et monotonie

Définition 10 (Suite croissante, décroissante)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \leq u_{n+1},$$
2. décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \geq u_{n+1},$$
3. monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 9 (Limite et monotonie)

Toute suite monotone admet une limite. De façon plus précise :

1. toute suite croissante non majorée admet pour limite $+\infty$,
2. toute suite croissante et majorée admet une limite finie,
3. toute suite décroissante et non minorée admet pour limite $-\infty$,
4. toute suite décroissante et minorée admet une limite finie.

3.6 Suites adjacentes

Définition 11 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit qu'elles sont **adjacentes** si et seulement si

1. l'une des suites est croissante,
2. l'autre suite est décroissante,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Propriété 5 (Limites et suites adjacentes)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante alors :

1. pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $u_n \leq v_m$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent, sont finies et sont égales.

3.7 Suites extraites

Définition 12 (Suites extraites)

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \text{ strictement croissante,}$$

telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété 6 (Propriété de φ)

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\varphi(n) \geq n.$$

En particulier, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} := \varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous-suite convergente.

3.8 Critère de Cauchy

Il se peut que l'on ait besoin de montrer qu'une suite est convergente sans nécessairement calculer explicitement sa limite. C'est le cas par exemple quand cette limite est difficile à trouver. Il existe alors un critère qui marche bien pour les suites réelles. C'est le critère de Cauchy. Avant de le définir, commençons par introduire les suites de Cauchy.

Définition 13 (Suites de Cauchy)

Un suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p et $q \in \mathbb{N}$, si $p, q \geq N$ alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

Proposition 10 (Suite de Cauchy bornée)

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 11 (Suite de Cauchy et convergence)

Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Remarque *Attention : même si toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque (toute suite de Cauchy est convergente) n'est pas vraie dans n'importe quel ensemble. Ici, nous travaillons dans $\mathbb{R}$, et ça marche. Mais il faut absolument que l'on se trouve dans un ensemble "sans trou", que l'on appelle également ensemble complet. Par exemple, cela ne marcherait pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels qui n'est pas complet.*

3.9 Fonctions et suites

Proposition 12 (Suites et fonctions continues)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telles que :

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$,
2. f est continue en l,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

Chapitre 4

Limites et continuité de fonctions

L'infini n'accède au réel que plongé dans le continu.

René Thom

Sommaire

4.1 Limites d'une fonction

(a) Archimède de Syracuse (287-212 av J.C.), mathématicien grec, a introduit une méthode de limite pour des problèmes de géométrie.

(b) Madhava de Sangamagrama (1350-1425), un mathématicien indien, fut le premier à effectuer le passage à la limite (sur des fonctions trigonométriques).

(c) Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), mathématicien allemand, fut le premier à formuler une définition de la limite avec les ε et δ qu'on utilise encore de nos jours.

FIGURE 4.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés aux limites de fonctions.

Afin de faire une étude plus complète d'une application, nous avons besoin de connaître son comportement en des points particuliers et la plupart du temps aux bornes de son domaine de définition. Nous allons faire la différence entre les limites en un point, et les limites en l'infini. Puis nous verrons quelques propriétés sur les limites.

4.1.1 Limites finie d'une fonction en un point

Jusqu'à présent la notion de limite que vous aviez vue au lycée était assez "intuitive". Pour une application f définie sur un intervalle I il s'agissait de voir, pour un x dans I vers quoi tendait la valeur $f(x)$ quand x "tendait" vers une valeur a de I. Cette limite quand elle existait était notée par un réel l ou autre chose selon les circonstance, et l'on avait :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Nous allons essayer de mettre sous forme mathématique cette intuition.
Mais auparavant nous allons bien définir vers quoi tend x pour avoir la limite. Quand on cherche la limite d'une fonction f quand x tend vers a il faut que x appartienne bien sûr au domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f sinon chercher vers quoi peut tendre $f(x)$ n'a aucun sens étant donné que $f(x)$ n'est pas défini.
Mais est-ce que a doit appartenir à $\mathscr{D}_f$? Pas forcément est c'est la toute la subtilité de ce qui va suivre.
En effet, a ne doit pas nécessairement appartenir à $\mathscr{D}_f$ mais x qui se rapproche aussi près que l'on veuille de a oui. Donc, le voisinage de a doit être rencontrer celui de $\mathscr{D}_f$.
On y arrive presque. En effet, si a se trouve au "bord" de $\mathscr{D}_f$, son voisinage ne peut pas être inclus du domaine de f.

On prend en compte ce cas, en disant que ce voisinage doit au-moins rencontrer $\mathscr{D}_f$ s'il ne peut pas y être inclus.
D'où la définition suivante.

Définition 1 (Adhérence)

Soient $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, et a un réel. On dit que a est adhérent à $\mathscr{D}$ lorsque pour tout réel $\eta > 0$, l'intervalle $[a-\eta, a+\eta]$ rencontre $\mathscr{D}$. Autrement dit, pour tout réel $\eta > 0$, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $|t-a| \leq \eta$.

Remarque
Si a est adhérent à $\mathscr{D}$ alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers a.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une limite en un point telle qu'elle a été introduite par Karl Weierstrass.

Définition 2 (Limite finie en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis (c'est à dire que a et l sont différents de $+\infty$ et $-\infty$) avec a adhérent à I.
On dit que f admet une limite finie l en a, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x-a| \leq \eta \quad \text{alors } |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a} f = l.$$

Remarque

1. *Intuitivement, cette définition signifie que $f(x)$ est aussi près de l que l'on veut (autrement dit dans un voisinage de l aussi petit que l'on veut), à condition de choisir x suffisamment près de a (autrement dit x doit être dans un voisinage suffisamment petit de a).*
2. *La définition de la limite précédente permet dire qu'il y a équivalence entre écrire que $f(x)$ tend vers l et $f(x)-l$ tend vers 0 quand x tend vers a, autrement dit on a équivalence entre :*
   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = l$,
   (b) $\lim_{x\to a} (f(x)-l) = 0$,
   (c) $\lim_{x\to a} |f(x)-l| = 0$.

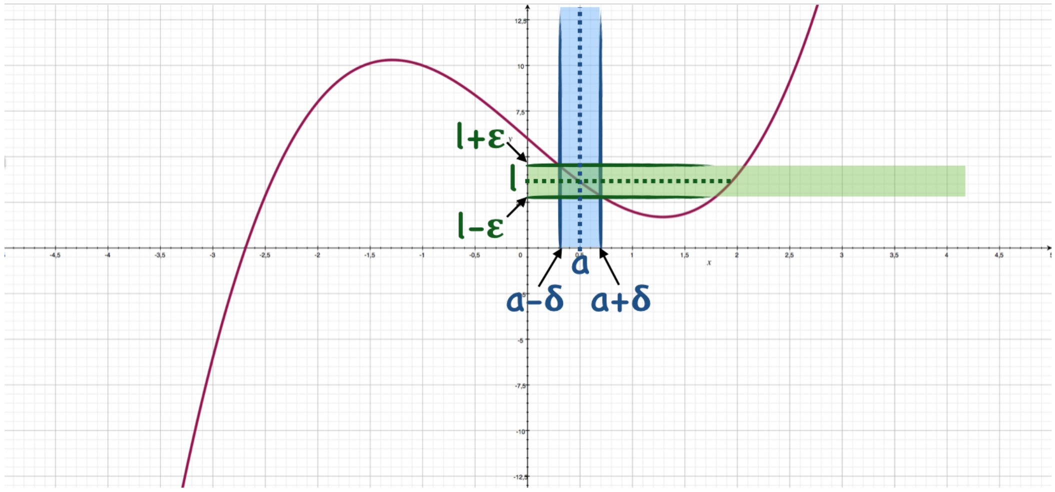


FIGURE 4.2 – Illustration de la définition de la limite finie en un point.

4.1.2 Limites infinie d'une fonction en un point

Définition 3 (Limite $+\infty$ en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I .
On dit que f admet la limite $+\infty$ et on dit (plus l'infini) en a, si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x - a| \leq \eta \quad \text{alors } f(x) \geq A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{a} f = +\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très grand.*

Définition 4 (Limite $-\infty$ en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I .
On dit que f admet la limite $-\infty$ et on dit (moins l'infini) en a, si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x-a| \leq \eta \quad \text{alors } f(x) \leq -A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{a} f = -\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très petit.*

Remarque *Lorsqu'on est en présence d'une limite infinie ($+$ ou $-\infty$) en un point fini a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.*

4.1.3 Limites à droite, limite à gauche

Définition 5 (Limite finie à droite)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis, avec a adhérent à $I \cap]a, +\infty[$.
On dit que f admet une limite à droite en a (on dit encore par valeurs supérieures en a) si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } 0 < x-a \leq \eta \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a^+} f = l.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très proche de l.*

Définition 6 (Limite finie à gauche)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis, avec a adhérent à $I\cap]-\infty, a[$.
On dit que f admet une limite à gauche en a (on dit encore par valeurs inférieures en a) si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } -\eta \leq x - a < 0 \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a^-} f = l.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très proche de l.*

Définition 7 (Limite $+\infty$ à droite)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à $I\cap]a, +\infty[$.
On dit que f admet une limite $+\infty$ à droite en a si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } 0 < x - a \leq \eta \quad \text{alors } f(x) > A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{a^+} f = +\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand.*

Remarque *On aurait de façon analogue :*

1. *la limite $+\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a \leq \eta$ par $-\eta \leq x - a < 0$ dans la définition précédente.*
2. *la limite $-\infty$ à droite s'obtient en remplaçant $f(x) \geq A$ par $f(x) \geq -A$ dans la définition précédente.*
3. *la limite $-\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a \leq \eta$ par $-\eta \leq x - a < 0$ et $f(x) \geq A$ par $f(x) \leq -A$ dans la définition précédente.*

4.1.4 Caractérisation séquentielle de la limite (limites et suites)

Proposition 1 (Continuité et limite de suite)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à I. Soit l un nombre réel fini (ou infini). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$,
2. pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, la suite $f(x_n)$ admet une limite finie l.

Remarque
Cette proposition est fondamentale dans le sens où on s'en sert énormément pour montrer :

1. *qu'une fonction admet une limite en un point, en utilisant les suites convergentes,*
2. *montrer qu'une fonction n'admet justement pas de limite en un point en utilisant la contraposée de cette proposition. Il suffit alors de trouver une suite qui converge vers a telle que la suite image n'admette pas de limite. On pourrait ainsi le montrer en trouvant deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de même limite a telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent des limites différentes.*

4.1.5 Limites d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Etant donné qu'ici nous allons faire tendre x vers l'infini, il faut qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[b, +\infty[$ (si on cherche la limite en $+\infty$) ou $]-\infty, b]$ (si on cherche la limite en $-\infty$) soit inclus dans $\mathscr{D}_f$. Nous allons pour cela donner un pendant à la définition de l'adhérence de la section précédente.

Définition 8 (Partie non majorée)

Soit $\mathscr{D}$ un partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $\mathscr{D}$ est non majorée lorsque pour tout réel A, l'intervalle $[A, +\infty[$ rencontre $\mathscr{D}$.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $A \leq t$.
On dit que $\mathscr{D}$ est non minorée lorsque pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty, A[$ rencontre $\mathscr{D}$.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $t \leq A$.

Définition 9 (Limite finie en $+\infty$)

Soit f une application définie sur un intervalle I non majoré. Soit l un réel fini.
On dit que f admet une limite finie en $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } x \geq A \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = l.$$

Remarque

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$, $f(x)$ devient très proche de l.*
2. *si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré et $x \geq A$ par $x \leq -A$, on définit la limite finie en $-\infty$ que l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{-\infty} f = l.$$

Remarque *Dans les deux cas précédents (limite finie l en $+\infty$ ou $-\infty$) on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.*

Définition 10 (Limite infinie en $+\infty$)

Soit f une application définie sur un intervalle I non majoré.
On dit que f admet une limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } x \geq A \quad \text{alors } f(x) \geq B.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = \infty.$$

Remarque

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$, $f(x)$ devient très grand.*
2. *Si l'on remplace $f(x) > B$ par $f(x) < -B$ dans la définition précédente on obtient la définition de la limite $-\infty$ en $+\infty$ que l'on note*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = -\infty.$$

3. *Si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré et $x \geq A$ par $x \leq -A$, on définit la limite $+\infty$ en $-\infty$ que l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

4. *Enfin, si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré , $x \geq A$ par $x \leq -A$ et $f(x) \geq B$ par $f(x) \leq -B$, on définit alors la limite $-\infty$ en $-\infty$ que l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

4.1.6 Propriétés des limites

Unicité de la limite, majoration, minoration

Propriété 1 (Unicité de la limite)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I (qui peut éventuellement être fini ou infini, et alors I est non majorée ou non minorée).
Si f possède une limite l en a cette limite est unique.

Propriété 2 (Egalité)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I.
Si f possède une limite l (finie ou infinie) en a on a a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{si et seulement si } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Propriété 3 (Majoration, minoration)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I.
Soient M et m deux réels. Alors :

1. si $\lim_{x \to a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage $f(x) < M$,
2. si $\lim_{x \to a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage $f(x) > m$.

Limites et comparaison

Propriété 4 (Comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels.
Si f et g possèdent respectivement l_1 et l_2 comme limites en a, et s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x),$$

alors

$$l_1 \leq l_2 \text{ (autrement dit } \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)\text{).}$$

Propriété 5 (Majoration par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a un réel adhérent à I. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$f(x) \leq g(x),$$

et si de plus $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Propriété 6 (Minoration par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a dans I. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$g(x) \leq f(x),$$

et si de plus $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soient a dans I et l un réel. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

et si de plus $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

4.1.7 Opérations algébriques sur les limites

Limite d'une somme de fonctions

Propriété 7 (Limite de somme)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Limite d'un produit de fonctions

Propriété 8 (Limite de produit)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	0	0
0	∞	**Forme indéterminée**

Limite d'un quotient de fonctions

Propriété 9 (Limite de quotient)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $g(x) \neq 0$ sur I. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 (\neq 0)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	**Forme indéterminée**
0	0	**Forme indéterminée**

4.1.8 Autres propriétés sur les limites

Il existe de nombreuses autres propriétés sur les limites que nous n'aborderons pas par manque de temps mais qu'il est recommandé d'avoir vues.

Limite et composée

Propriété 10 (Limite de fonctions composées)

Soient f et g définies respectivement sur I et J. Soient a et b deux réels adhérents respectivement à I et à J, et l un nombre réel. On suppose que la composée $g \circ f$ existe, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$.
Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l.$$

Limite et monotonie

Proposition 2 (Limite et monotonie)

Soit f une fonction croissante (respectivement décroissante) définie sur I et a un point adhérent à $I\cap]-\infty, a[$.
- Si la restriction de f à $I\cap]-\infty, a[$ n'est pas majorée (respectivement non minorée), alors

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ (respectivement } -\infty\text{).}$$

- Si la restriction de f à $I\cap]-\infty, a[$ est majorée (respectivement minorée), alors elle admet une limite finie,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x) \text{ (respectivement } \inf_{x<a} f(x)\text{).}$$

Remarque

1. *Si on considère a adhérent à $I\cap]a, +\infty[$, on a un résultat analogue en inversant croissante et décroissante.*

2. *On obtient un résultat analogue également quand on fait tendre x vers $+$ ou $-\infty$ sous la forme : toute fonction croissante et majorée admet une limite finie et toute fonction décroissante et minorée admet une limite finie. Il faudra cependant faire attention : la limite n'est en général pas égal à la majoration (ou la minoration) de la fonction.*

Critère de Cauchy

Ce dernier résultat que nous reverrons ensuite adapté pour les suites est important quand on veut montrer l'existence d'une limite finie sans pour autant être capable de la calculer explicitement.

Définition 11 (Critère de Cauchy)

Soit f une fonction définie sur I. Soit a un réel adhérent à I. On dit que f satisfait le critère de Cauchy au point a lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } |x-a| \leq \eta, \text{ et } |y-a| \leq \eta \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

De façon analogue,
- si I est non majoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $+\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } x \geq A, \text{ et } y \geq A \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

- si I est non minoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $-\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } x \geq -A, \text{ et } y \geq -A \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 3 (Limite critère de Cauchy)

Une fonction f admet une limite finie en a (a fini ou infini) si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy en a.

4.2 Continuité

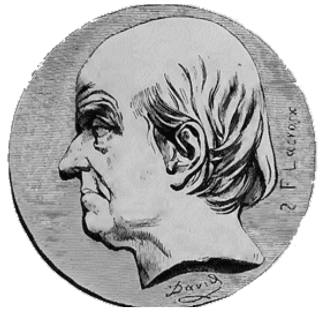
Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas posés de questions à propos de la continuité de fonctions. Intuitivement, une fonction continue, est à nos yeux une fonction dont le graphe est en un “seul morceau”, ”sans coupure”. c'est ce qui semble le cas pour toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre précédent, sauf peut-être la fonction partie entière, et les fonctions inverses et homographiques. Voyons dans ce chapitre comment formaliser mathématiquement la notion de continuité. Un peu comme nous l'avons fait pour définir la notion de limite de fonctions.

Dans tout ce chapitre, nous considérons I comme un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, et nous considérons a comme un point de I.

4.2.1 Caractérisation de Weierstrass

Commençons par donner la définition de la continuité d'une fonction en un point que l'on appelle “caractérisation de Weierstrass”).

(a) Bernard Bolzano (1781 – 1848), (Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano), mathématicien né et mort à Prague (à l'époque dans l'empire d'Autriche) à qui l'on doit la définition de la continuité.



(b) Sylvestre-François Lacroix ou De la Croix (1765 - 1843), mathématicien français, reprend la notion de continuité définie par Euler, cas particulier de la continuité que nous connaissons.

(c) Eduard Heine (1821 - 1881), mathématicien allemand a défini la notion de continuité uniforme (que nous n'aborderons pas ici)

FIGURE 4.3 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la continuité. Noter que Cauchy et Weierstrass ont joué un rôle très important dans cette étude, leur photo se trouvant dans des chapitres précédents, il a semblé plus judicieux de montrer d'autres protagonistes qui ont contribué à l'élaboration de cette théorie.

Définition 12 (Caractérisation de Weierstrass)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit a un point de I.
La fonction f est dite continue en a si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un autre réel $\eta > 0$ (qui dépend du choix de ε) tel que pour tout x de I

$$\text{si } |x-a| \leq \eta \quad \text{alors } |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

Remarque

1. *En d'autres termes, dire qu'une fonction est continue signifie que sa courbe représentative ne présente pas de sauts.*
2. *Le réel η dépend à la fois du ε que l'on va choisir, mais également du point a. Il peut être différent suivant le point a que l'on étudiera.*

La définition précédente peut se caractériser de la façon suivante en termes de limites :

Définition 13 (Continuité et limite)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On dit que la fonction f est continue en I si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De façon similaire on utiliserait la limite à gauche pour parler de continuité à gauche et de limite à droite pour parler de continuité à droite.

Définition 14 (Continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit a un point de I.

1. La fonction f est dite continue à gauche de a si et seulement si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$
2. La fonction f est dite continue à droite de a si et seulement si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Définition 15 (Continuité sur un intervalle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On dit que la fonction f est continue en I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

4.2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité (continuité et suites)

Proposition 4 (Continuité et limite de suite)

Pour qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ soit continue en un point $a \in I$, il faut et il suffit que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, la suite $f(x_n)$ soit convergente vers $f(a)$.

Remarque

Cette proposition est fondamentale dans le sens où on s'en sert énormément pour montrer :

1. *qu'une fonction est continue en un point, en utilisant les suites convergentes,*
2. *montrer qu'une fonction n'est justement pas continue en un point en utilisant la contraposée de cette proposition. Il suffit alors de trouver une suite qui converge vers a telle que la suite image ne soit pas convergente ou admet une limite différente de $f(a)$.*

4.2.3 Continuité, opérations algébriques et composition

Comme pour les limites, nous pouvons énoncer quelques propriétés de continuité qui peuvent être conservées des opérations sur les fonctions.

Propriété 11 (Continuité et opérations sur les fonctions)

Soient f et g deux fonctions de I intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que f et g sont continues en a un réel de I. On a alors les propriétés suivantes :

1. la fonction $f + g$ est continue en a,
2. pour tout réel k, la fonction kf est continue en a,
3. si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

En conséquence,

1. une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$,
2. toute fonction rationnelle f définie pour tout x dans l'intervalle I de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes définis sur I avec $Q(x) \neq 0$ sur I, est continue sur I.

Propriété 12 (Continuité et composition de fonctions)

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$. Supposons que f soit continue en $a \in I$, et que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (où $l \in J$). Si g est continue en l alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(l).$$

Remarque *En conséquence, la composée de deux fonctions continues est continue. Attention toutefois, il faut de la continuité des fonctions dans leur domaines. Dans tous les cas, de toute façon, quand on étudie les fonctions composées, les domaines et images de fonctions sont à manipuler avec précaution. Rajouter de la continuité, ne fait que rajouter des précautions supplémentaires dans leur étude.*

Il arrive quelques fois que certaines fonctions, par leur définition ne soient pas continues. Mais en les dessinant on s'aperçoit que leur graphe possède juste un "trou" que l'on peut facilement "boucher" par un point, afin de recoller la courbe qui les représente. En les rebouchant on dit que l'on peut les prolonger par continuité. D'où la proposition suivante :

Proposition 5 (Prolongement par continuité)

Soit I un intervalle de de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. Soit f un fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On suppose de plus que f admet une limite finie l en a. Alors la fonction g définie pour tout x de I (autrement dit le domaine de définition de f auquel on a ajouté le point a), par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \neq a, \\ l, & \text{si} \quad x = a, \end{cases}$$

est continue en a.
On dit que g constitue le prolongement par continuité de f en a.

Cette proposition pourra s'avérer utile dans le chapitre des équations différentielles, lorsque l'on cherchera des solutions maximales sur deux intervalles séparés d'un point que l'on peut "recoller" en solution globale sur l'union de ces intervalles incluant ce point.

La propriété suivante permet de définir la continuité des fonctions usuelles.

Propriété 13 (Continuité des fonctions usuelles)

Les fonctions usuelles :

1. fonction constante $x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
2. fonction identité $x \mapsto x$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
3. fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
4. fonction puissance entière $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n \leq 0$,,
5. fonction racine $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n-ième définie $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ si n est pair, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si n est impair,
6. puissance rationnelle $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ où p/q ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) est irréductible définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$
7. fonction homographique définie par $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{d}{c}\}$
8. fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$
9. fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$,
10. fonctions circulaires définies sur $\mathbb{R}$ pour sinus et cosinus, et $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2}\}$ pour tangente,
11. fonction hyperboliques définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

sont continues sur leur ensemble de définition.

4.2.4 Théorèmes sur la continuité

Nous introduisons dans cette section les théorèmes fondamentaux sur la continuité auxquels vous ne pourrez pas échapper. Ils forment la base de la connaissance de l'analyse pour les semestres suivants.
Commençons par l'un des théorème intuitivement facile à énoncer.

Théorème 2 (Théorème de Bolzano)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont tels que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque *Noter que si $f(a)$ (ou $f(b)$) est nul, alors automatiquement il existe au-moins c tel que $f(c) = 0$, puisque $c = f(a)$ (ou $f(b)$).*

Théorème 3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. Alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par la fonction f.
En d'autres termes, pour tout a et b réels de I tels que $a < b$,

$$\text{si } k \in]f(a), f(b)[\text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = k.$$

Remarque *Ce théorème permet de dire que l'image d'un intervalle est un intervalle.*

Théorème 4 (Théorème de Weierstrass (bornes atteintes))

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ de I intervalle de $\mathbb{R}$ (autrement dit sur un intervalle fermé et bornée de I). Alors il existe deux réels c_1 et c_2 dans $[a, b]$ tels que pour tout x dans $[a, b]$,

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

Remarque *Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle fermé borné, alors f est aussi bornée et atteint des bornes.*

Remarque *Une conséquence de ce théorème est la proposition suivante :*
pour tous réels a et b avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un segment.

4.2.5 Continuité, monotonie, injectivité et bijectivité

Proposition 6 (Continuité et monotonie)

Si f est une fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ (l'image par f de I) soit également un intervalle, alors f est continue.

Remarque *Attention, il faut que la fonction soit monotone pour avoir le résultat. En général, si l'image par une fonction f d'un intervalle est un intervalle, alors f n'est pas forcément continue.*

Exemple *Si l'on considère la fonction suivante*

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
 & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} \sin(\dfrac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0, \\ k, & \text{si x = 0}, \end{cases}
\end{array}
$$

avec $k \in [-1, 1]$.
Alors f n'est pas continue en 0 et pourtant pour tout intervalle I contenant 0, on a $f(I) = [-1, 1]$.

Proposition 7 (Monotonie et injectivité)

Soit f une fonction définie (pas forcément continue) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est strictement monotone. Alors f est injective.

Pour avoir la réciproque, nous sommes obligés de supposer la continuité de f, sinon cela ne marche pas.

Proposition 8 (Continuité et injectivité)

Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est injective et continue sur I alors elle est nécessairement strictement monotone.

Remarque *Attention, une fonction injective et non continue n'est pas forcément monotone. On peut par exemple considérer une fonction continue par morceaux donc chaque morceau est soit strictement croissant soit strictement décroissant.*

Théorème 5 (Continuité et bijectivité)

Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est injective et continue sur I et si on pose $J = f(I)$ (l'image de I par f), et si l'on considère la fonction g :

$$
\begin{array}{rccl}
g: & I & \to & J \\
 & x & \mapsto & g(x) := f(x),
\end{array}
$$

alors la fonction g est bijective et sa fonction réciproque g^{-1} est continue.

Remarque

1. *Les hypothèses du théorème précédent signifient que la fonction g permet de restreindre l'ensemble d'arrivée I de la fonction f injective et continue à son image $J = f(I)$ de telle sorte que g soit, par construction à la fois injective et surjective donc bijective.*
2. *Comme d'après la proposition précédente (continuité et injectivité) la fonction f est strictement monotone, alors sa fonction réciproque est aussi strictement monotone, et de même sens de variation que f.*

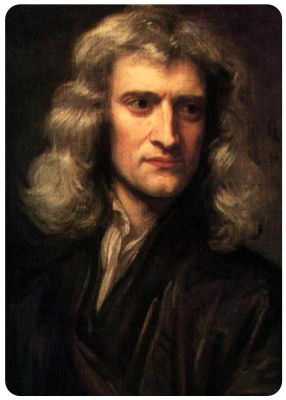
Chapitre 5

Dérivabilité

Exponentielle et logarithme sont dans un bateau. Soudain logarithme s'exclame :
- Nous dérivons ! Nous dérivons !
Exponentielle répond :
- Pff. Et alors ?

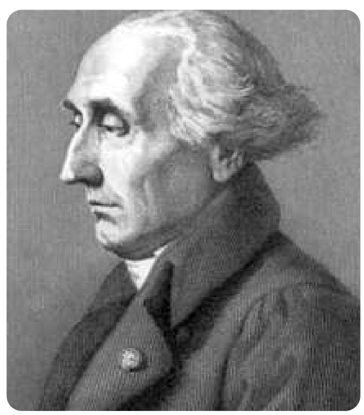
Inconnu

Sommaire



(a) Sir Isaac Newton (1642–1727), Newton partage avec Gottfried Wilhelm Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Dans l'histoire du calcul infinitésimal, le procès de Newton contre Leibniz est resté célèbre. Newton et Leibniz avaient trouvé l'art de lever les indéterminations dans le calcul des tangentes ou dérivées.

(b) Guillaume François Antoine de L'Hôpital, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieux (1661 -1704), mathématicien français à qui l'on doit la règle qui porte son nom .



(c) Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813), mathématicien, on lui doit entre autres choses la notation f' pour désigner la dérivée d'une fonction.

FIGURE 5.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la dérivabilité des fonctions. Noter que Cauchy et Weierstrass ont joué un rôle très important dans cette étude, leur photo se trouvant dans des chapitres précédents, il a semblé plus judicieux de montrer d'autres protagonistes qui ont contribué à l'élaboration de cette théorie.

Ce chapitre se trouve dans la suite logique des chapitres précédents. Ainsi, après avoir défini les fonctions, étudié leurs limites et leur continuité, nous pouvons désormais nous

intéresser à un aspect important de la théorie de l'analyse : les dérivées. Le développement à la fois de la théorie et des applications dans ce domaine précis s'est énormément développé depuis sa création "officielle" au $XVII$ème siècle par Leibniz et Newton.
Nous verrons dans ce chapitre quelques définitions qui seront nouvelles pour les étudiants mais également des résultats connus ainsi que des théorèmes fondamentaux qui serviront tout au long de leur cursus.

5.1 Définition de la dérivabilité de f

Avec les définitions des limites, nous avons désormais toutes les cartes en main pour définir la notion de dérivée d'une fonction.

Définition 1 (Dérivée en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On dit que f est dérivable en a si la fonction suivante (appelée taux d'accroissement),

$$\begin{array}{rccc} g: & I-\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, \end{array}$$

possède une limite finie l au point a.
Dans ce cas là, on note la limite l de la façon suivante :

$$l = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Ce nombre $f'(a)$ est appelé dérivée de f en a.

Définition 2 (Dérivée sur à droite et à gauche)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I (ou bien une extrémité de I).

1. On dit que f est dérivable à droite en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à droite quand x tend vers a (supérieurement).

2. On dit que f est dérivable à gauche en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à gauche quand x tend vers a (inférieurement).

Définition 3 (Dérivée sur I)

On dit que f est dérivable sur I si, pour tout x de I, f est dérivable en x. Et note $f' : x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée.

Remarque *On peut définir la dérivée d'une fonction f en un point a d'une autre façon. Si l'on considère la fonction ε_a définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_a : & \mathscr{D}_f \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varepsilon_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a). \end{array}$$

Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et l'on peut écrire

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_a(x).$$

Interprétation graphique de la dérivée (voir cours en classe).

Remarque *Grâce à ce qui précède il est alors possible d'en déduire une équation de la tangente au graphe de f en a par :*

$$y = (x - a)f'(a) + f(a).$$

5.2 Dérivabilité et continuité

D'après la remarque de la fin de la section précédente on peut en déduire le premier résultat.

Proposition 1 (dérivée et continuité)

Si f est dérivable en un point a, alors elle est continue en ce point a.
On peut également remarquer que si f est dérivable la fonction ε est également continue en a.

Remarque *Attention : la réciproque de cette proposition est fausse en général !*
Considérer par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en 0.

Nous pouvons également donner la proposition suivante qui caractérise les fonctions dérivables en a.

Proposition 2 (caractérisation de la dérivée)

Une fonction f définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ est dérivable en un point a si et seulement s'il existe un nombre réel l et une fonction ε_a qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_a \text{ est continue en } a \text{ et } \varepsilon_a(a) = 0 \\ f(x) = f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon_a(x) \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$$

Dans ce cas le nombre l est exactement la dérivée $f'(a)$ de f en a.

5.3 Dérivabilité, opérations algébriques et composition

Proposition 3 (dérivée opérations algébriques)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I.

1. Si f et g sont dérivables en a, la fonction $f+g$ est dérivable en a et on a
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. Si f et g sont dérivables en a, la fonction fg est dérivable en a et on a
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Si f et g sont dérivables en a, avec $g(a) \neq 0$ la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Proposition 4 (dérivée d'une fonction composée)

Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans J, et g une fonction définie sur J à valeurs dans K (I, J et K étant des intervalles de $\mathbb{R}$).
Si f est dérivable en a, un élément de I, et si g est dérivable en $f(a)$ un élément de J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Remarque *Lorsqu'on dérive des fonctions composées on peut faire une analogie avec des* *poupées russes. Les fonctions dans la composition s'emboîtent les unes dans les autres. Et lorsque l'on dérive cette composition de fonctions, cela revient à enlever les poupées les unes après les autres. Et chaque fois qu'on en retire une on la dérive au point correspondant à l'intérieur des poupées encore rangées que l'on n'a pas encore touchées.*

Une des conséquences de la proposition précédente est la dérivée de la réciproque d'une fonction.

Proposition 5 (dérivée d'une fonction réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Proposition 6 (dérivée d'une fonction réciproque sur I)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

5.4 Dérivée et monotonie

Proposition 7 (dérivée d'une fonction constante)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée f' est identiquement nulle sur I.

Proposition 8 (dérivée et monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors

1. f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I.
2. f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I.
3. f est strictement croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.
4. f est strictement décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

5.5 Dérivées et extrema

Rappelons les résultats suivants sur le maximum et le minimum d'une fonction.

Proposition 9 (Maximum et minimum d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I. On dit que :

1. la fonction f admet un maximum en c si pour tout x de I,
$$f(x) \leq f(c),$$
2. la fonction f admet un minimum en c si pour tout x de I,
$$f(x) \geq f(c),$$
3. la fonction f admet un extremum en c si elle admet un maximum ou un minimum en c.

Proposition 10 (Maximum et minimum locaux)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I. On dit que :

1. la fonction f admet un maximum local en c s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert de la forme $]c-\eta, c+\eta[$ soit inclus dans I et la restriction de f à cet intervalle admette un maximum en c, soit encore : il existe $\eta > 0$ tel que
$$\text{si pour tout } x \in I, |x-c| \leq \eta \text{ alors } f(x) \leq f(c),$$
2. la fonction f admet un minimum local en c s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert de la forme $[c-\eta, c+\eta]$ soit inclus dans I et la restriction de f à cet intervalle admette un minimum en c, soit encore : il existe $\eta > 0$ tel que
$$\text{si pour tout } x \in I, |x-c| \leq \eta \text{ alors } f(x) \geq f(c),$$
3. la fonction f admet un extremum local en c si elle admet un maximum ou un minimum local en c.

Proposition 11 (Dérivée et extrema locaux- Théorème de Fermat)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I . Si f est dérivable c et admet un extremum local en ce point alors
$$f'(c) = 0.$$

Remarque

1. *Attention cela ne marche dans le cadre général que si I est un ouvert (autrement on ne prend pas les bords de l'intervalle I en compte) !*
2. *Attention la réciproque de cette proposition est fausse en général !*

5.6 Théorèmes fondamentaux sur les dérivées

Nous en arrivons aux théorèmes fondamentaux. Ces théorèmes comme leur nom l'indique sont essentiels pour la suite du cours d'analyse. Ils seront utilisés souvent dans les preuves de propositions ou théorèmes ainsi que dans la résolution d'une grande variété d'exercices.

Théorème 1 (Théorème de Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors si $f(a) = f(b)$, il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Remarque *Attention, si jamais f n'est pas dérivable sur l'intervalle, il se peut que la fonction possède un extremum sans qu'une seule valeur de la dérivée de f (là où f est dérivable) s'annule.*

FIGURE 5.2 – Michel Rolle, (1652 -1719), mathématicien français ; a formulé une première version du théorème qui porte son nom en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable. On lui doit au passage la notation normalisée : $\sqrt[n]{x}$ pour désigner la racine n-ième d'un réel x.

Théorème 2 (Théorème des accroissements finis ou théorème de Lagrange)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Théorème 3 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$, dérivables sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

Proposition 12 (Prolongement en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ (où a est un élément de I).
On suppose que sa dérivée f' admet une limite réelle l au point a. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque *Attention : la dérivée d'une fonction f n'a pas toujours pour limite $f'(a)$ au point a. Ce qui signifie que la dérivée d'une fonction dérivable n'a pas de raison d'être continue.*

Exemple
La fonction suivante est un exemple classique de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est dérivable en 0 mais n'est pas continue en ce point puisque que sa dérivée n'admet pas de limité en 0.

Proposition 13 (Règle de l'Hôpital)

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que g et g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$, alors :

1. (version 1) si $f(a) = g(a) = 0$, on a le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

2. (version 2) si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, on a le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Remarque

1. *Dans la proposition précédente, la limite l peut être finie ou infinie.*
2. *La règle de l'Hôpital n'est à utiliser qu'en cas d'indétermination de la forme* "$\frac{0}{0}$" *pour la version 1 ou* "$\frac{\infty}{\infty}$" *pour la version 2.*
3. *On peut utiliser la règle de l'Hôpital en dérivant plusieurs fois (sous réserve que les dérivées successives existent).*
4. *Ces deux versions ne donnent que des conditions suffisantes pour avoir la limite. C'est à dire que la réciproque est fausse. Il se peut que la limite du quotient des dérivées n'existe pas alors que la limite du quotient. existe.*
   Un exemple illustrant le dernier point de la remarque est donné par le calcul de

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x))}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0,$$

tandis que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{1},$$

ne possède pas de limite en 0.

5.7 Dérivées des fonctions usuelles

Commençons par donner les dérivées qui sont supposées être connues depuis le Lycée et donc, supposées être parfaitement maîtrisées non seulement par leurs formulation mais également leur domaine de définition.

Propriété 1 (Dérivée des fonctions puissance)

La dérivée des fonctions puissance est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	a $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	x^n $(n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Viennent ensuite les dérivées qui sont nouvelles cette année. Leurs valeurs sont importantes à connaître, surtout lorsque l'on abordera le chapitre sur les équations différentielles avec les dérivées mais également les primitives des fonctions usuelles à connaître. Encore une fois, les ensembles de définitions sont aussi important que les formulations des dérivées.

Propriété 2 (Dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique)

La dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$
$\mathbb{R}^*$	$\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{\mathrm{sh}(x)^2} = 1 - \coth^2(x)$

Propriété 3 (Dérivée des fonctions trigonométriques)

La dérivée des fonctions trigonométriques est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\mathrm{cotan}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{cotan}^2(x)$

5.8 Dérivées successives

5.8.1 Dérivée $n^{ième}$

Définition 4 (Fonction dérivable plusieurs fois)

1. Etant donnés un entier n non nul, et une fonction f définie et dérivable n fois sur I, la dérivée $n^{ième}$ est définie comme de la façon suivante :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

   avec pour convention $f^{(0)} = f$.
2. si f admet une dérivée $n^{ième}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est n fois dérivable sur I.
3. si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $n^{ième}$ de f existe, on dit que f est indéfiniment dérivable.

5.8.2 Classes de fonction

5.8.3 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$

Définition 5 (classe $\mathscr{C}^n$)

Soit n un entier non nul. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et sa dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}$ est continue sur I.
Si $n = 0$ on dit juste que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$ sans être nécessairement dérivable.

5.8.4 Fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

Définition 6 (classe $\mathscr{C}^\infty$)

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si pour tout entier naturel n, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

5.8.5 Dérivée $n^{ième}$ d'une somme de fonctions

Proposition 14 (Dérivée $n^{ième}$ d'une somme)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors :

1. la somme $f+g$ est également n fois dérivable et $(f+g)^n = f^n + g^n$,
2. si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est également n fois dérivable et $(\lambda f)^n = \lambda f^n$.

5.8.6 Dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions

La dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions est un peu plus compliqué. Elle porte un nom : c'est la formule de Leibniz.

Proposition 15 (Formule de Leibniz)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors la fonction produit fg est également n fois dérivable sur I et

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

où, pour tout entier $k = 0, ..., n$, C_n^k que l'on écrit également $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre défini par :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Et par convention, ce coefficient est nul si $k > n$.

Remarque *Si l'on considère une fonction g qui ne s'annule pas sur I on peut définir la dérivée $n^{ième}$ d'un quotient de fonctions $\frac{f}{g}$ en reprenant la formule précédente mais en multipliant f par $\frac{1}{g}$ au lieu de g.*

5.8.7 Dérivée $n^{ième}$ de la composée de deux fonctions.

Contrairement à la formule de Liebniz qui doit être connue par coeur, celle de Faà di Bruno n'est donnée ici qu'à titre indicatif (elle n'est pas au programme). Elle permet de voir qu'ils est possible de calculer la dérivée $n^{ième}$ de la composée de deux fonctions, mais la formulation reste quand même bien compliquée.

Proposition 16 (Formule de Faà di Bruno)

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$, et n un entier naturel. On suppose que f est n fois dérivable sur I et g est n fois dérivable J . Alors la fonction composée $g \circ f$ est également n fois dérivable sur I et

$$(g \circ f)^n = n! \sum \frac{m!}{b_1!b_2!...b_m!} g^k \circ f \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{(b_1)} \left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{(b_2)} ... \left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{(b_m)}$$

où, la somme est sur toutes les différentes solutions entiers naturels b_1, b_2, ...,b_m de l'équation

$$b_1 + 2b_2 + ... + mb_m,$$

et $k := b_1 + b_2 + ... + b_m$

5.9 Fonctions convexes

Les fonctions convexes sont très utiles dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées et notamment dans le domaine de l'optimisation. Nous verrons d'ailleurs dans cette section comment elles sont reliées aux extrema.
Commençons par donner d'abord une définition de ces fonctions.

Définition 7 (Fonction convexe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tous x et y dans I

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

pour tout $t \in [0, 1]$.
La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 17 (Convexité et segment)

La fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous a et b dans I avec $a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 18 (Convexité et dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si sa dérivée f' est croissante alors f est convexe et pour tous $x, a \in I$

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Corollaire 1 (Convexité et dérivée seconde)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur I. Si sa dérivée seconde f'' est telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est convexe sur I.

Nous pouvons désormais donner quelques résultats reliant la convexité avec les extrema. Mais auparavant, rappelons un résultat reliant les extrema avec les dérivées et dérivées secondes d'une fonctions.Nous nous focaliserons sur les minima (les résultats sur les maxima sont analogues en considérant $-f$ plutôt que f).

Proposition 19 (Dérivée et minimum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$.

1. Si a est un minimum local alors $f'(a) = 0$.
2. Si de plus, f est deux fois dérivables en a, alors $f''(a) \geq 0$

"Inversement"
Si $b \in I$ est tel que $f'(b) = 0$ et si $f''(b) > 0$ alors b est un minimum local strict (avec les inégalités strictes) de f.

Remarque *Attention :*

1. *les conditions $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$ ne sont pas suffisantes (sauf si f est convexe).*
   Exemple : $f : x \mapsto x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un minimum local.
2. *D'autre part, la condition $f''(a) > 0$ n'est pas nécessaire.*
   Exemple : $f : x \mapsto x^4$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et pourtant 0 est bien minimum de f.

Proposition 20 (Convexité et minimum)

Soit f une fonction **convexe** définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur I. Soit $a \in I$. On a alors

$$f'(a) = 0 \text{ est équivalent à } a \text{ minimum de } f \text{ sur } I.$$