Examen du 6 juin 2007 — corrigé succinct

Exercice 2

(a) On note $f(x,u) = \exp[-(x/u)^2 - u^2]$. La fonction $x \to f(x,u)$ est continue à u fixé, la fonction $u \to f(x,u)$ est mesurable à x fixé, et l'on a de plus la majoration $|f(x,u)| \leqslant \exp(-u^2)$. La fonction $u \to \exp(-u^2)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $o(1/u^2)$ en $\pm\infty$, elle est donc intégrable sur $\mathbf{R}$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre implique que F est continue sur $\mathbf{R}$, et de plus F est bornée par $\int_{\mathbf{R}} \exp(-u^2)du$.

(b) Comme F est paire, il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \to f(x,u)$ est dérivable à u fixé. Fixons $0 < a < b$, pour $x \in [a,b]$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \frac{2A}{u^2}\exp(-(a/u)^2)). \tag{1}$$

Soit g la fonction qui apparaît dans le membre de droite de (1), $g(u) \leqslant \frac{2A}{u^2}$ donc g est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. Par ailleurs g est prolongeable par continuité en 0, donc g est intégrable sur $\mathbf{R}$. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre permet d'affirmer que F est dérivable sur $[a,A]$. En faisant tendre a vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$F'(x) = -4x\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right]du = 4\int_{+\infty}^0 \exp\left[-v^2 - \left(\frac{x}{v}\right)^2\right]dv = -2F(x), \tag{2}$$

où l'on a effectué le changement de variable $v = x/u$.

(c) En résolvant l'équation différentielle $F' = -2F$ sur $]0,+\infty[$, on obtient $F(x) = \lambda\exp(-2x)$. La constante λ est déterminée en remarquant que F est continue en 0, donc $\lambda = F(0)$. La valeur de F sur $]-\infty,0[$ s'obtient par parité, on a

$$F(x) = F(0)\exp(-2|x|).$$

(d) En utilisant le théorème de Tonelli, on obtient

$$F(0)^2 = \int_{\mathbf{R}^2} \exp(-u^2 - v^2)d\lambda_2(u,v).$$

On effectue ensuite un changement de variables en coordonnées polaires :

$$F(0)^2 = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} \exp(-r^2)rd\lambda_2(r,\theta).$$

En utilisant à nouveau le théorème de Tonelli, on obtient

$$F(0)^2 = 2\pi\int_0^{\infty} r\exp(-r^2)dt = 2\pi\left[-\exp(-r^2)/2\right]_0^{\infty} = \pi.$$

D'où $F(0) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3

(1) Remarquons que (E_n) forme une partition de E et que $E_n \in \mathscr{T}$ puisque f est mesurable. On a

$$\int fd\mu = \int\sum_{n=0}^{+\infty} f\mathbf{1}_{E_n}d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int \mathbf{1}_{E_n}d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{E_n} fd\mu,$$

où l'interversion série-intégrale est justifiée en appliquant le théorème de convergence montonone à la suite (croissante) des sommes partielles de la série $\sum f\mathbf{1}d\mu$. Par ailleurs, on a $n \leqslant f(x) < n+1$ pour $x \in E_n$, donc $n\mu(E_n) \leqslant \int_{E_n} fd\mu \leqslant (n+1)\mu(E_n)$. En sommant sur n, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(E_n) \leqslant \int fd\mu \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mu(E_n) = \mu(E) + \sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(E_n).$$

Comme $\mu(E) < +\infty$, on a bien l'équivalence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(E_n) < +\infty \iff \int fd\mu < +\infty.$$

(2) Un raisonnement similaire à celui de la question précédente donne l'encadrement

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n\mu(F_n) \leqslant \int fd\mu \leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^{n+1}\mu(F_n) = 2\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n\mu(F_n),$$

d'où l'équivalence demandée.

Exercice 4

(1) Fixons $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$. Pour l'étude aux bornes on compare aux intégrales de Riemann. En $+\infty$, on a l'équivalent $f_n(x) \sim \frac{n^n}{x^n}$, donc f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0, on a l'équivalent $f_n(x) \sim \frac{1}{x^{1/n}}$, donc f_n est intégrable au voisiange de 0. Finalement, f_n est bien intégrable sur $]0,+\infty[$.

(2) Il faut minorer $(1+\frac{x}{n})^n$. Considérons le dévoleppement de Newton

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{x}{n}\right)^k.$$

Comme tous les termes sont positifs on peut minorer la somme par le terme en x^2. On obtient pour $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant C_n^2\frac{x^2}{n^2} = \frac{n-1}{2n}x^2 \geqslant \frac{x^2}{4}.$$

Par ailleurs, pour $x \geqslant 1$ on a $\frac{1}{x^{1/n}} \leqslant 1$. On obtient alors $f_n(x) \leqslant 4/x^2$.

(3) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1 \\ \frac{4}{x^2} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

La fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$, et de plus $|f_n| \leqslant g$ pour $n \geqslant 2$. Par ailleurs $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \exp(-x)$. En appliquant le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty}\exp(-x)dx = 1.$$

Exercice 5

(1) Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6$ définie par

$$f(u,v,w) = (u,v,w,uv,uw,vw).$$

La fonction f est continue (les fonctions coordonnées sont des polynômes). Comme

$$U = f^{-1}\left(]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,1[\times]0,1[\times]0,1[\right),$$

U est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Ainsi U est ouvert, donc borélien.

(2) Soit $V =]0,1[^3$. On remarque que $\Phi(U) \subset V$ et que l'application $\Psi : V \to U$ définie par $\Psi(x,y,z) = (\frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z})$ vérifie $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ et $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$. C'est donc que $\Phi : U \to V$ est une bijection et que $\Psi = \Phi^{-1}$. Par ailleurs Φ est de classe C^1, on calcule son jacobien

$$J_\Phi = \det \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{u}} & 0 & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{w}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Le jacobien ne s'annule donc pas. Φ est donc un C^1-difféomorphisme de U sur V, et le théorème du changement de variables donne

$$I = \int_V xyz \cdot 4 \cdot d\lambda_3(x,y,z).$$

En utilisant le théorème de Tonelli, on obtient

$$I = 4\left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 ydy\right)\left(\int_0^1 zdz\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$