Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Examen du 6 juin 2007

Durée : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.

Avertissement : tout résultat du cours utilisé sans en vérifier les hypothèses ne sera pas pris en compte dans la notation. Le barème indiqué n'est qu'approximatif.

Exercice 1 (question de cours — 2 points)

Enoncer le théorème de Tonelli (on prendra soin de bien en préciser les hypothèses).

Exercice 2 (7 points)

Pour x réel, soit $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du.$

(a) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.

(c) En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.

(d) Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 3 (3 points)

Soient $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

(1) On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

(2) On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n\mu(F_n) < +\infty$.

Exercice 4 (4 points)

On considére pour $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f_n est Lebesgue-intégrable sur $]0, +\infty[$.

(2) Démontrer que pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $f_n(x) \leqslant \frac{4}{x^2}$.

(3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

T.S.V.P.

Exercice 5 (4 points)

Soit U la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$U = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } u > 0, v > 0, w > 0 \text{ et } uv < 1, uw < 1, vw < 1\}$$

(1) Montrer que U est borélien.

(2) On note λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^3$. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_U uvw \; d\lambda_3(u, v, w).$$

On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$