Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Examen du 26 juin 2007

Durée : 2 heures 30.

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.

Exercice 1 (2 points)

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est borélienne.

Exercice 2 (9 points)

On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} dx$.

1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3) Montrer que I est continue en 0.

4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 3 (9 points)

On rappelle qu'on note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$, et que la fonction "cosinus hyperbolique" est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$.

1) On se donne les trois intégrales

$$A = \int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad B = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad C = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(u,v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}$$

   (a) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

   (b) En faisant le changement de variables $s = u - v, t = u + v$, prouver que $B = C$ et donner la valeur de A.

2) On considère la fonction $H : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-x \operatorname{ch} t) dt.$$

   (a) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. Déterminer les limites de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

   (b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

   (c) En utilisant l'intégrale A de la partie 1, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$.