

**Feuille d'exercices numéro 0**  
Opérations sur les ensembles. Dénombrément.

## Opérations sur les ensembles

On travaille dans un ensemble  $X$  fixé. On désigne par  $A, B$  des parties de  $X$ , et par  $(A_i), (B_i)$  des familles de parties de  $X$  indexées par un ensemble *quelconque* d'indices  $I$ . On désigne par  $A^c$  le complémentaire dans  $X$  de la partie  $A$ .

**Exercice 1** Montrer les propriétés suivantes

1. Si  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite croissante de parties de  $X$ , alors  $\forall n_0 \in \mathbf{N}, \bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq n_0} A_n$ .
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite décroissante de parties de  $X$ , alors  $\forall n_0 \in \mathbf{N}, \bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq n_0} A_n$ .
3.  $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$  et  $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$ .
4.  $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$  et  $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ .
5.  $A \setminus (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$  et  $(\bigcup_{i \in I} A_i) \setminus B = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B)$ .
6.  $A \setminus (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$  et  $(\bigcap_{i \in I} A_i) \setminus B = \bigcap_{i \in I} (A_i \setminus B)$ .

**Exercice 2 Image directe, image réciproque**

On se donne maintenant deux ensembles  $X$  et  $Y$ , et une application  $f : X \rightarrow Y$ . Si  $A \subset X$ , on définit  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ . Si  $B \subset Y$ , on définit  $f^{-1}(B) = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \in B\}$ . Montrer les relations suivantes

1.  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .
2.  $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .
3.  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .
4. Si de plus  $g$  est une application de  $Y$  vers un ensemble  $Z$ , alors  $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ .

Avec  $f$  les relations analogues ne sont pas vraies en général

1. Montrer que  $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ .
2. Montrer que  $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$  et donner un contre-exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.
3. Montrer par un contre-exemple qu'aucune inclusion n'est vraie entre  $f(A^c)$  et  $f(A)^c$ .

**Exercice 3 Injectivité.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective.
2.  $\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$ .
3.  $\forall x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ .

4.  $\forall A \subset X; f(A^c) \subset [f(A)]^c$ .
5.  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .
6.  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } A \cap B = \emptyset, f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .
7.  $f$  admet une rétraction  $r$ , c'est-à-dire une application  $r : Y \rightarrow X$  telle que  $r \circ f = \text{Id}_X$ .

**Exercice 4 Surjectivité.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est surjective
2.  $\forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$ .
3.  $\forall B \subset Y, f^{-1}(B) = \emptyset \implies B = \emptyset$ .
4.  $\forall y \in Y, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ .
5.  $\forall A \subset X, f(A^c) \supset [f(A)]^c$ .
6.  $f$  admet une section  $s$ , c'est-à-dire une application  $s : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ s = \text{Id}_Y$ .

**Exercice 5** Soient  $X$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux parties fixes de  $X$ .

1. Résoudre dans  $\mathcal{P}(X)$  les équations suivantes en  $C$ 
  - (i)  $A \cup C \subset B \cup C$ .
  - (ii)  $A \cap C \subset B \cap C$ .
  - (iii)  $(A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ .
2. On définit l'application  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  par  $f(C) = (A \cap C, B \cap C)$ . Déterminer pour le couple  $(A, B)$  une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit
  - (i) injective.
  - (ii) surjective.

## Dénombrément

**Exercice 6** Démontrer que les ensembles suivants sont dénombrables :  $\mathbf{N}^*, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ .

**Exercice 7**

- (a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $p_1, \dots, p_n$   $n$  nombres premiers distincts. Montrer que  $\mathbf{N}^n$  est dénombrable à l'aide de l'application  $\phi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$
- (b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?

**Exercice 8 Fonction indicatrice.** Soit  $X$  un ensemble. Pour une partie  $A$  de  $X$ , on définit sa *fonction indicatrice*  $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  par  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ .

- (1) Exprimer simplement en fonction de  $\mathbf{1}_A$  et  $\mathbf{1}_B$  les fonctions  $\mathbf{1}_{A^c}, \mathbf{1}_{A \cap B}, \mathbf{1}_{A \cup B}$  (dans le cas général et dans le cas particulier où  $A \cap B = \emptyset$ ),  $\mathbf{1}_{A \Delta B}, \mathbf{1}_{f^{-1}(A)}$ .
- (2) Soit  $(A_n)$  une suite de parties de  $X$  et  $A = \bigcup_n A_n$ .
  - (a) Montrer que si la suite  $(A_n)$  est croissante (c'est-à-dire si  $A_n \subset A_{n+1}$ ), alors la suite  $(\mathbf{1}_{A_n})$  est croissante et converge simplement vers  $\mathbf{1}_A$ .
  - (b) Si les  $A_n$  sont deux à deux disjoints, montrer que  $\mathbf{1}_A = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$ .
- (3) Soit  $\mathcal{F}_2(X)$  (resp.  $\mathcal{F}_3(X)$ ) l'ensemble des applications de  $X$  vers  $\{0, 1\}$  (resp.  $\{0, 1, 2\}$ ). Expliciter une bijection de  $\mathcal{P}(X)$  sur  $\mathcal{F}_2(X)$ . Expliciter une bijection de l'ensemble des couples  $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  tels que  $A \subset B$  sur  $\mathcal{F}_3(X)$ .

**Exercice 9** Un nombre réel  $x$  est dit *algébrique* s'il existe un polynôme  $P$  à coefficients entiers tel que  $P(x) = 0$ . Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

**Exercice 10** (\*) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points où  $f$  n'est pas continue est au plus dénombrable.

**Exercice 11** (\*) Montrer que tout ouvert de  $\mathbf{R}$  est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.