Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 1

Tribus.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

(1) $\mathbf{N}^6$ est dénombrable.
(2) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ est dénombrable.
(3) Soit E un ensemble. Alors $A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$.
(4) $\mathscr{T}$ est une tribu sur E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
- $\emptyset \in \mathscr{T}$.
- $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A^c \in \mathscr{T}$.
- $(\forall n \in \mathbf{N}, A_n \in \mathscr{T}) \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathscr{T}$.

(5) Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Alors $E \in \mathscr{T}$.
(6) Si E est dénombrable et $\mathscr{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathscr{T}$ est dénombrable.

Exercice 2 Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

Exercice 3 Combien y a-t-il de tribus différentes sur un ensemble à 3 éléments ? Sur un ensemble à 4 éléments ?

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et A, B des éléments de $\mathscr{T}$. Montrer que $A \cap B \in \mathscr{T}$ et $A \Delta B \in \mathscr{T}$.

Exercice 5 Les classes suivantes sont-elles des tribus ?
(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. A est finie $\}$.
(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. A est finie ou A^c est finie $\}$.
(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. A est au plus dénombrable ou A^c est au plus dénombrable $\}$.

Exercice 6 Soient $X = \mathbf{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{n\}; n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbf{N})$.

Exercice 7 Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Déterminer la tribu engendrée $\sigma(\mathscr{A})$ dans les cas suivants :
(a) $\mathscr{A} = \{A\}$, où A est une partie fixe de X.
(b) $\mathscr{A} = \{\{x\}, x \in X\}$. On séparara le cas où X est fini ou dénombrable et le cas où X n'est pas au plus dénombrable.
(c) $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. $A_0 \subset A\}$, où A_0 est une partie fixe de X.

Exercice 8 Montrer que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux classes de parties de X telles que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{B})$. Montrer ensuite que $\sigma(\sigma(\mathscr{A})) = \sigma(\mathscr{A})$.

Exercice 9 Soit $f : X \to Y$ une fonction entre deux ensembles.
(a) Soit $\mathscr{B}$ une tribu sur Y. Monter que l'ensemble $f^{-1}[\mathscr{B}] := \{f^{-1}(B), B \in \mathscr{B}\}$ est une tribu sur X. Montrer que si $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ alors $f^{-1}[\mathscr{B}] = \sigma(\{f^{-1}(B), B \in \mathscr{E}\})$.
(b) Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur X. Donner un exemple montrant que $\{f(A), A \in \mathscr{A}\}$ n'est pas nécessairement une tribu sur Y. Montrer qu'en revanche $\{B \in \mathscr{P}(Y)$ t.q. $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur Y.

Exercice 10 Tribu engendrée par une partition. Soit $\pi = \{A_i\}_{i \in I}$ une partition de X. Déterminer $\sigma(\pi)$:
(a) Lorsque I est au plus dénombrable.
(b) Lorsque I n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 11 Tribu trace.
(1) Soit X un ensemble, $\mathscr{T}$ une tribu dans X et $A \in \mathscr{T}$ une partie fixée. On note $\mathscr{T}_A$ la trace de $\mathscr{T}$ sur A, définie par $\mathscr{T}_A = \{B \cap A, B \in \mathscr{T}\}$. Montrer que $\mathscr{T}_A = \{D \in \mathscr{P}(X)$ t.q. $D \in \mathscr{T}$ et $D \subset A\}$.
(2) On suppose de plus que $\mathscr{T} = \sigma(\mathscr{A})$, où $\mathscr{A}$ est une classe de parties de X, telle que $A \in \mathscr{A}$. On note $\mathscr{A}_A = \{B \cap A, B \in \mathscr{A}\}$. Montrer que $\mathscr{T}_A = \sigma(\mathscr{A}_A)$. Que peut-on en déduire concernant la tribu borélienne de $[0, 1]$?

Exercice 12 La tribu borélienne de R. On munit $\mathbf{R}$ de la métrique usuelle et on note $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu borélienne de $\mathbf{R}$.

(1) Montrer que tout ouvert, tout fermé et tout intervalle de $\mathbf{R}$ sont des boréliens.
(2) On note $\mathcal{I} = \{[a,b[, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ et $\mathcal{D} = \{]-\infty, x], x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{D})$.
(3) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est engendrée par une classe dénombrable.
(4) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ n'est pas engendrée par une partition de $\mathbf{R}$.
(5) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_a = \{B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}\}$. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est une tribu. En déduire que $\forall B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}, B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On dit que la tribu borélienne est invariante par translation.
(6) Soit $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}} = \{B \in \mathscr{B}_R \text{ t.q. } B = -B\}$. Montrer que $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}}$ est une tribu, que l'on appelle tribu des boréliens symétriques.

Exercice 13 On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}$.
(1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}_n = \{[\![0,n]\!], \{n+1\}, \{n+2\}, \cdots\}$ et $\mathscr{T}_n = \sigma(\mathscr{A}_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}_n)$ est une suite décroissante. On note ensuite $\mathscr{T} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}_n$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \mathbf{N}\}$.
(2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}'_n = \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n-1\}, [\![n, +\infty[\![\}$ et $\mathscr{T}'_n = \sigma(\mathscr{A}'_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}'_n)$ est croissante. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}'_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 14 (*) On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $n\mathbf{N}^*$ l'ensemble des multiples non nuls de n. Soit les classes $\mathscr{A} = \{n\mathbf{N}^*, n \geqslant 1\}$ et $\mathscr{A}' = \{p\mathbf{N}^*, p \geqslant 1, p \text{ premier}\}$. Montrer que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(X)$, mais que $\sigma(\mathscr{A}') \neq \mathscr{P}(X)$.

Exercice 15 Soit X un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une classe de parties de X. Montrer que pour chaque ensemble $C \in \sigma(\mathscr{A})$, il existe une sous-classe au plus dénombrable $\mathscr{A}_C \subset \mathscr{A}$ telle que $C \in \sigma(\mathscr{A}_C)$.

Exercice 16 Soient X et Y deux ensembles au plus dénombrables. Montrer que le produit des tribus complètes est la tribu complète du prosuit cartésien, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.

Exercice 17 (**) Existe-t-il une tribu infinie dénombrable ?