

Feuille d'exercices numéro 2
Fonctions mesurables.

Fonctions mesurables.

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace mesurable (X, \mathcal{F}) .

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

- (1) L'ensemble $[2, 3] \cap \mathbf{Q}$ est un borélien de \mathbf{R} .
- (2) Une fonction $f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{F}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
- (3) Si $f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{F}_2)$ est mesurable et $g : (X_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{F}_3)$ est étagée, alors $g \circ f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_3, \mathcal{F}_3)$ est étagée.
- (4) Si $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$ vérifie que pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$, alors f est mesurable.
- (5) Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
- (6) L'ensemble $A = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de \mathbf{R} .

Exercice 2 Soit $A \subset X$. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée f' est borélienne.

Exercice 4 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 5 Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable et $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $f(x) \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est mesurable.

Exercice 6 Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < M \\ M & \text{si } f(x) \geq M \\ -M & \text{si } f(x) \leq -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :

- (A) f est mesurable.
- (B) $\forall M > 0, f_M$ est mesurable.

Exercice 7 Décrire les fonctions mesurables de (X, \mathcal{F}) dans \mathbf{R} dans les cas suivants :

- (1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.
- (2) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$.

Exercice 8 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans \mathbf{R} .

- (a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge}\}$ et $B = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$. Montrer que A et B sont dans \mathcal{F} .
- (b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ par $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f_n(x) \geq a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 9 Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable et bornée. Montrer qu'il existe une suite de fonctions étagées qui converge **uniformément** vers f . La conclusion reste-t-elle valable si l'on ne suppose plus que f est bornée ?

Exercice 10 On note $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans \mathbf{R} .

- (a) Montrer que toute fonction constante appartient à $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F})$.
- (b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F})$ mais que la réciproque est fautive.
- (c) Soit $X = \mathbf{R}$ et \mathcal{F}_s la tribu dans X engendrée par les singletons. Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}_s)$ si et seulement si il existe un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable tel que $f|_{D^c}$ soit constante.

Exercice 11 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). Soit f une fonction de X dans \mathbf{R} .

- (a) Montrer qu'il existe sur X une plus petite tribu, notée \mathcal{T}_f telle que $f : (X, \mathcal{T}_f) \rightarrow \mathbf{R}$ soit mesurable.
- (b) Décrire \mathcal{T}_f dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$.
- (c) Décrire \mathcal{T}_f dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction "partie entière".
- (d) On revient au cas général. Soit $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ une autre fonction. Montrer que g est mesurable (pour la tribu \mathcal{T}_f) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$.

Exercice 12 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). On note $B(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans \mathbf{R} . Si $f \in B(X)$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On remarquera que $B(X)$ est un espace vectoriel.

Soit E un sous-espace vectoriel de $B(X)$. On dit que E est régulier s'il vérifie

- (i) $\mathbf{1}_X \in E$
- (ii) Si f et g appartiennent dans E , alors $\max(f, g)$ appartient à E .
- (iii) Si (f_n) est une suite d'éléments de E telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < \infty$ et qui converge simplement vers une fonction f , alors f appartient à E .

1. Soit \mathcal{T} une tribu sur X et $BM(X, \mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions de X dans \mathbf{R} qui sont bornées et mesurables (pour \mathcal{T}). Montrer que $BM(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$.
2. Réciproquement, soit E un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$. On va construire une tribu \mathcal{T} dans X telle que $E = BM(X, \mathcal{T})$.
 - (a) Soit $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } \mathbf{1}_A \in E\}$. Montrer que \mathcal{T} est une tribu dans X .
 - (b) Montrer que $BM(X, \mathcal{T}) \subset E$.
 - (c) On fixe $f \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leq \alpha\}$ et $g = \max(f, \alpha) - \alpha$. Montrer que $g(x) = 0 \iff x \in A$. On pose ensuite pour $n \geq 1$, $g_n = n \inf(g, 1/n)$. Quelle est la limite simple de la suite (g_n) ? En déduire que $A \in \mathcal{T}$, puis que $f \in BM(X, \mathcal{T})$. Conclure.