

Feuille d'exercices numéro 3
Mesures

Sauf mention contraire, μ dénote une mesure sur un espace mesurable (X, \mathcal{F}) .

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

- (1) Si $A \in \mathcal{F}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
- (2) Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de \mathcal{F} et $\mu(A_2) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- (3) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
- (4) Si $A, B \in \mathcal{F}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
- (5) Il existe un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathcal{F}\} = \{0, 1, 2\}$.
- (6) Il existe un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathcal{F}\} = \{0, 1, 3\}$.

Exercice 2 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles (A_n) telle que $\mu(A_n) \not\rightarrow \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

Exercice 3 On rappelle que μ est σ -finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de \mathcal{F} telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n . Montrer que si μ est σ -finie, on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 4 Montrer que la mesure de comptage sur \mathbb{N} n'est pas finie, mais est σ -finie.

Exercice 5 Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable tel que la tribu \mathcal{F} contient les singletons. Soit μ une mesure finie sur (X, \mathcal{F}) . On note $D = \{x \in X \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}$. Montrer que D est au plus dénombrable. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose plus que la mesure est finie ? Et si on suppose que la mesure est σ -finie ?

Exercice 6

- (a) Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$.
- (b) Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X)$. Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.
- (c) Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$. Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(X)}{n}$.

Exercice 7 (Partiel automne 2006) Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que \mathcal{F}' est une tribu dans X .

Exercice 8 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite *quelconque* de parties mesurables.

(a) Établir les encadrements suivants :

$$(a1) \sup_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

$$(a2) 0 \leq \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \leq \inf_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

Dans *quels cas* obtient-on des égalités ?

(b) Montrer les implications suivantes :

$$(b1) \forall n, \mu(A_n) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = 0.$$

$$(b2) \mu(X) = 1 \text{ et } \forall n, \mu(A_n) = 1 \implies \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = 1.$$

Exercice 9 Soit (E, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré, tel que pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{x\}) < +\infty$. On dit que μ est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout $x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

(a) Montrer que μ est diffuse si et seulement si toute partie A au plus dénombrable est μ -négligeable.

- (b) Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E et une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs telles que $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{a_n}$.
- (c) On suppose maintenant que la mesure μ est σ -finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$ où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 10 Soit X un ensemble; on suppose que X n'est pas au plus dénombrable. On rappelle que $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } A \text{ a.p.d. ou } A^c \text{ a.p.d.}\}$ est une tribu dans X . Soit $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R}^+$ définie par $\mu(A) = 0$ si A est a.p.d. et $\mu(A^c) = 1$ sinon.

- (a) Montrer que μ est une mesure finie sur (X, \mathcal{T}) .
- (b) Soit ν une mesure sur (X, \mathcal{T}) telle que $\nu(X) = 1$ et $\nu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$. Montrer que $\nu = \mu$.
- (c) Soit τ une mesure finie sur \mathcal{T} et $D = \{x \in X \text{ t.q. } \tau(\{x\}) \neq 0\}$. On rappelle que D est a.p.d. . On pose $\tau_1 = \sum_{x \in D} \tau(\{x\}) \delta_x$. Montrer que $\tau_1 \leq \tau$. En déduire qu'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\tau = \tau_1 + M\mu$.

Exercice 11 Mesure image. Soient (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}') des espaces mesurables, et $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur \mathcal{T} . On définit $\nu : \mathcal{T}' \rightarrow [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.

- (a) Montrer que ν est une mesure sur \mathcal{T}' . On dit que c'est la mesure image de μ par ϕ , et on la note $\phi_*\mu$.
- (b) On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in X$. Déterminer $\phi_*\delta_a$.
- (c) On suppose que μ est une mesure sur \mathcal{T} vérifiant $\mu(X) = 1$. On fixe $B \in \mathcal{T}$ et on choisit $(Y, \mathcal{T}') = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$. Déterminer $(\mathbf{1}_B)_*\mu$.

Exercice 12 Applications préservant une mesure. On fixe un espace mesuré (X, \mathcal{T}, μ) . On dit qu'une application $f : X \rightarrow X$ préserve μ si pour tout $A \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ et $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Soit f une application qui préserve μ . On pose $f^1 = f$, et $f^{n+1} = f^n \circ f$, pour $n \geq 1$.

- (1) Montrer que f^n préserve μ pour tout $n \geq 1$.
- (2) On fixe $A \in \mathcal{T}$. Soit $F = \{x \in A \text{ t.q. } \forall n \geq 1, f^n(x) \notin A\}$.
- (2a) Montrer que $F \in \mathcal{T}$.
- (2b) Pour $p \geq 1$, soit $F_p = (f^p)^{-1}(F)$. Montrer que les ensembles (F_p) sont deux à deux disjoints.
- (2c) En déduire que $\mu(F) = 0$.

Exercice 13 Fonction de répartition. Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $F(t) = \mu(]-\infty, t])$.

- (a) Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- (b) Montrer que F est croissante.
- (c) Déterminer les limites de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- (d) Montrer que F est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur \mathbf{R} .

On suppose désormais que F est continue sur \mathbf{R} .

- (e) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de \mathbf{R} . On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
- (f) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
- (g) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F . Que vaut $\nu(]-\infty, x])$ pour $x \in \mathbf{R}$?
- (h) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\frac{1}{2}(b-a)$ et tel que $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$.