Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 4

Mesure de Lebesgue. Intégration et théorème de convergence monotone.

Soit $(E,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'une propriété $P(x)$ est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) si $\mu(\{x \text{ t.q. } P(x) \text{ est fausse}\})=0$. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

(1) Si $f=\mathbf{1}_A$ avec $A\in\mathscr{T}$, alors $\int f d\mu=\mu(A)$.
(2) Si $f:E\to[0,+\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{+\infty\}))$, alors f est intégrable.
(3) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 2 Invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

1) On a vu précédemment que si $x\in\mathbf{R}$ et $A\in\mathscr{B}_\mathbf{R}$, alors $x+A\in\mathscr{B}_\mathbf{R}$.
(a) On fixe $x\in\mathbf{R}$. Soit $\mu:\mathscr{B}_\mathbf{R}\to[0,+\infty]$ définie par $\mu(A)=\lambda(x+A)$ pour $A\in\mathscr{B}_\mathbf{R}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$.
(b) En déduire que $\lambda(x+A)=\lambda(A)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$ et $A\in\mathscr{B}_\mathbf{R}$. On dit que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.
2) Soit μ une mesure sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ vérifiant $\mu([0,1])=1$ et $\mu(x+I)=\mu(I)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$ et pour tout intervalle $I\subset\mathbf{R}$.
(a) Soit B un borélien borné de $\mathbf{R}$; montrer que $\mu(B)<+\infty$. En déduire que μ est σ-finie.
(b) Montrer que $\mu(\{x\})=0$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. Ainsi la mesure μ est diffuse.
Pour $t\in\mathbf{R}$, on pose

$$F(t)=\begin{cases}\mu([0,t[) \text{ si } t\geqslant 0\\ -\mu([t,0[) \text{ si } t\leqslant 0\end{cases}.$$

(c) Montrer que si $0\leqslant s\leqslant t$, alors $F(t)-F(s)=F(t-s)$.
(d) En déduire que $F(nt)=nF(t),\forall n\in\mathbf{N},\forall t\geqslant 0$.
(e) Montrer que cette égalité est encore vraie pour $n\in\mathbf{Z}$ et $t\in\mathbf{R}$.
(f) En déduire que pour tout $r\in\mathbf{Q}$ et $t\in\mathbf{R}$, on a $F(rt)=rF(t)$. Calculer $F(r)$, d'abord pour $r\in\mathbf{Q}$ puis pour tout $r\in\mathbf{R}$.
(g) Déduire de tout cela que $\mu=\lambda$.
Quelles sont les mesures sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ qui sont invariantes par translation ?

Exercice 3

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que $\lambda(U)=0$ si et seulement si $U=\emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f=g\ \lambda-\text{p.p.} \iff f=g$.
3. Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. On considère les deux propritétés suivantes :
   (P1) : f est continue λ-p.p.
   (P2) : Il existe une fonction $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue telle que $f=g$ λ-p.p.
   Donner l'exemple d'une fonction f_1 qui vérifie (P1) mais qui ne vérifie pas (P2), et d'une fonction f_2 qui vérifie (P2) mais qui ne vérifie pas (P1).
4. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(U)\leqslant\varepsilon$.
5. On fixe un borélien A et on définit l'application $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ par $f(x)=\lambda(A\cap[-x,x])$. Montrer que pour tous $x,y\geqslant 0$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$. En déduire que f est continue, puis que pour tout $t\in[0,\lambda(A)]$, il existe un borélien B tel que $B\subset A$ et $\lambda(B)=1$.

Exercice 4 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :
(a) μ est une mesure de Dirac.
(b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$.

Exercice 5 Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré et $f:X\to\overline{\mathbf{R}^+}$ une application mesurable. Montrer que :
(a) $\displaystyle\int_X f d\mu<+\infty \Longrightarrow f<+\infty$ μ-p.p.
(b) $\displaystyle\int_X f d\mu=0 \Longrightarrow f=0$ μ-p.p.

Exercice 6 Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$ et $f : X \to \overline{\mathbf{R}^+}$ une application mesurable.

(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_A f^n d\mu$.

(b) On suppose $\int_X f d\mu < +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{A^c} f^n d\mu$.

Exercice 7 Soit $\varphi : (X, \mathscr{T}) \to (X', \mathscr{T}')$ une application mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$ et $\varphi_*\mu$ la mesure image (sur $\mathscr{T}'$) de μ par l'application φ. Soit $f : X' \to \mathbf{R}^+$ une application mesurable. Montrer que

$$\int_{X'} f d(\varphi_*\mu) = \int_X (f \circ \varphi) d\mu.$$

Exercice 8 (partiel automne 2006) Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

1) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f. On suppose que f_0 est intégrable (c'est-à-dire que $\int f_0 d\mu < \infty$). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $I_n < \infty$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 9 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} d\mu(t)$.

(a) Montrer que la fonction F est à valeurs dans $[0, 1]$.

(b) Montrer que la fonction F est décroissante.

(c) Soit (x_n) une suite croissante de réels positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$. Conclusion ?

Exercice 10 (partiel automne 2006)

1) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit $(a_{n,k})_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que :

(H1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}^*, a_{n,k} \geqslant 0$;

(H2) pour tout entier n fixé, la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

On note $a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit (μ_k) une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :

(H) pour tout $A \in \mathscr{T}$, la suite $(\mu_k(A))$ est croissante.

Pour $A \in \mathscr{T}$, on note $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(A)$.

En utilisant la question **1**, montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.

3) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, la suite $(\int f d\mu_k)$ est croissante (on pourra commencer par le cas où f est étagée).

4) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.