Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 6
Fonctions définies par des intégrales.

Exercice 1 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.
(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $t \to \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On pose alors pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \cos(xt) d\mu(t)$.
(2) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
(3) On suppose que l'application $t \to t^2$ est μ-intégtrable. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2}$. On pourra remarquer et justifier l'inégalité $1 - \cos(u) \leqslant u^2/2$.
(4) On ne suppose plus que $t \to t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2} = 0$.
(4a) Soit G définie sur $\mathbf{R}^+$ par $G(x) = \dfrac{1-F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbf{R}^+$.
(4b) En déduire que $t \to t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.
(4c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 2 (Examen janvier 2007)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable. On pose pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-itx} d\lambda_1(x).$$

(a) Montrer que la fonction $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
(b) On pose $g(x) = -ixf(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ et on suppose que la fonction g est Lebesgue-intégrable. Montrer que la fonction $\hat{f}$ est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 3 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} dt$.
(1a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.
(1b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(2) En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-t^2) dt$ puis de $J = \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2) dt$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixt} e^{-t^2/2} dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$.
(3a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
(3b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 5 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right) dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
(3) Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.
(4) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 6 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.
(1) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \to f(t,x)$ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty f(t,x) dx$.
(2a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
(2b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
(2c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 7 Pour $y>0$, soit $F(y)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\exp(-x^2y)}{1+x^2}dx$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)$.
(2a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
(2b) Montrer que F vérifie sur $\mathbf{R}_+^*$ une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I=\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx$.
(2c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y\geqslant 0$.
(2d) Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 8 Pour $x\in\mathbf{R}$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ et $G(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.
(1) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbf{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
(2) Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0)-F(x)+G(x)=C|x|,\ \text{où } C=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}.$$

(3a) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie $G''(x)=F(x)$ pour tout réel x.
(3b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
(3c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x>0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbf{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
(4) Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

Exercice 9
(1) Montrer que pour tout $x>0$, l'application $t\to t^{x-1}e^{-t}$ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
(2) Pour $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer ensuite que Γ est de classe C^{∞} sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 10 Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x>0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 11 (*) Soit $F(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}dx$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2dx$.