Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 7

Mesures produits

Exercice 1 On désigne par λ (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x,x); x \in [0,1]\}$. Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x,y) = y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a,b] \times [0,1]$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)} dy.$$

Exercice 3 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
2. Soit $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t[); G_\mu(t) = \mu(]t, +\infty[); H_\mu(t) = \mu(\{t\}).$$

1. Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

2a. Soit ν une autre mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\nu(\mathbf{R}) = 1$. Montrer que $\int_\mathbf{R} F_\mu d\nu = \int_\mathbf{R} G_\nu d\mu$.

2b. Soit $D_\mu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\nu(t) \neq 0\}$. Justifier que les ensembles D_μ et D_ν sont au plus dénombrables et montrer l'égalité suivante

$$\int_\mathbf{R} F_\mu d\nu + \int_\mathbf{R} F_\nu d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{t\})\nu(\{t\}) = 1.$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_\mathbf{R} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} d\mu(t).$$

1. Montrer que H_s est continue sur $\mathbf{R}$ et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} sH_s(a)$.
3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^b H_s(x)dx$.
4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ telles que $\mu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 6 Pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice 7 Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ définie par $f(x,y) = \exp(-xy)\sin(x)$.

1. f est elle λ_2-intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$?
2. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[0,A] \times \mathbf{R}^+$ pour tout nombre $A > 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 8 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour x réel, on pose $\phi(x) = \int_\mathbf{R} \exp(ixt) d\mu(t)$.

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp(-iax)\phi(x) dx = \int_\mathbf{R} K_n(t-a) d\mu(t)$$

   où K_n est une fonction que l'on explicitera.
3. Déterminer $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp(-iax)\phi(x) dx$.
4. En déduire que si ϕ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 9 En calculant de deux façons $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x} \sin 2xy dy dx$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.