Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 8

Changements de variables

Exercice 1 On rappelle que pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que $\forall x > 0, \forall y > 0$:, l'application $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ-intégrable sur $[0,1]$. On pose pour $x > 0$ et $y > 0$: $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.
2. Soient $x > 0, y > 0$ et $I = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dsdt$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbf{R}^2$: $u = t$ et $v = t + s$.
3. En calculant I d'une autre manière, établir la formule pour $x, y > 0$
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 2 Pour $n \geqslant 1$, soit $U_n = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \text{t.q. } x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < 1\}$. Soit $S_n = \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1}. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 3 Soit B_n la boule-unité euclidienne de $\mathbf{R}_n$, c'est à dire
$$B_n = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1\}.$$
Soit $V_n = \lambda_n(B_n)$. Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, exprimer V_n à l'aide de la fonction Γ introduite à l'exercice 1.

Exercice 4

1. Soit $H : (u,v) \to (s,t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,1[$ sur l'ouvert $V = (\mathbf{R}_+^*)^2$.
2. Soit $x > 0, y > 0$ et
$$I = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+} s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}dsdt.$$
En utilisant le changement de variables H, calculer I et retrouver la formule établie à l'exercice 1.

Exercice 5 Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application borélienne. On fixe $a, b, c > 0$ et on note
$$I_{a,b,c} = \int_{(\mathbf{R}^+)^3} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}f(x+y+z)dxdydz.$$

1. Soit $H : (x,y,z) \to (u,v,w)$ avec $u = x+y+z$, $v = \frac{x}{x+y}$ et $w = \frac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbf{R}_+^*)^3$ sur un ouvert V de $\mathbf{R}^3$ à expliciter.
2. En utilisant H et la formule établie à l'exercice 1, en déduire que
$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty f(u)u^{a+b+c-1}du$$
3. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit l'intégrale
$$J = \int_{(\mathbf{R}^+)^3} \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$
A quelle condition sur α, β, γ l'intégrale J est-elle finie ?

4. Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } x^2+y^2+z^2 < 1\}$. En utilisant la question 2, calculer

$$L = \int_B |x|^{a-1}|y|^{b-1}|z|^{c-1}dxdydz.$$

Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice 6 (examen janvier 2007, 1ère session)

Partie 1

Pour $a > 0$ et $x \geqslant 0$, on pose $H_a(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(at^2+\frac{x}{t^2})}dt$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(a) Montrer que la fonction $H_a : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ est continue.

(b) Calculer $H_a(0)$.

(c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0,+\infty[$.

(d) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{\alpha}{s}$ avec α convenablement choisi).

(e) En déduire que $H_a(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ax}}$, $a > 0$, $x \geqslant 0$.

Partie 2

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \alpha > 0.$$

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) = \int_{(\mathbf{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2+\frac{x}{y^2})}x^{\alpha-\frac{1}{2}}d\lambda_2(x,y).$$

(a) En utilisant la partie 1, montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.

(b) En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x/y^2 \end{cases}$ (que l'on justifiera), montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

(c) En déduire la formule $\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice 7 (examen janvier 2007, 2ème session)

Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. Soit $0 \leqslant a < b$. On pose

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(a) Montrer que D est un borélien.

(b) A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)d\lambda_2(x,y)$ en fonction de a et b.