Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen partiel du 16 avril 2007

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Les 6 exerices sont indépendants. Le barème proposé est indicatif et pourra être modifié. Pour la correction, l'accent sera mis sur la qualité de la rédaction : **un résultat exact mais non justifié vaut 0 point.**

Exercice 1 (Question de cours — 2 points)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Rappeler la définition de l'intégrale d'une fonction étagée, puis de l'intégrale d'une fonction mesurable positive.

Exercice 2 (3 points)

On rappelle que la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par la famille des intervalles ouverts $]a, b[$, $a < b$. En déduire que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est aussi la tribu engendrée par la famille $\mathscr{C}$ suivante :

$$\mathscr{C} = \{]-\infty, t], t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 3 (3,5 points)

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ qui vérifie les conditions suivantes :
(C_1) $\forall x \in \mathbf{R}, \mu(\{x\}) = 0$.
(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbf{Q}) = 0$·
3. Soit $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On définit la fonction f_A comme suit :

$$f_A : \begin{cases} \mathbf{R} \to [0, +\infty[\\ x \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$

   Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbf{Q}$.
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbf{R}$. Même question pour $A = [0, 1]$ (il est inutile de justifier le tracé des graphes).

Exercice 4 (4 points)

(a) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans $\mathbf{R}$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x)\right) dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 5 (3 points)

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 6 (4,5 points)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f.

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$

   Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}\cdot$ Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$. Ce résultat s'appelle le théorème d'Egoroff.