Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen partiel du 21 avril 2008 : corrigé succinct

Exercice 2

1. $\mathscr{T} = \{\emptyset, A, B, C, A^c, B^c, C^c, X\}$; c'est la tribu engendrée par la partition $X = A \cup B \cup C$.
2. $f = \mathbf{1}_{\{d\}}$. Cette fonction n'est pas mesurable car $\{d\} \notin \mathscr{T}$.

Exercice 3

1. Soit $f_n(x) = 1/(1+x^n)$, définie sur $]0,1[$. La suite (f_n) est une suite croissante de fonctions positives boréliennes (car continues), et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. D'après le théorème de convergence monotone appliqué à (f_n) sur $]0,1[$, $\lim I_n = \int_0^1 1dx = 1$.
2. $$n(1-I_n) = \int_0^1 n\left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)dx = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}du.$$
   Pour la dernière égalité on a utilisé le changement de variables $u = x^n$.
3. Soit $g_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u}$, définie sur $]0,1[$. La suite (g_n) est croissante (calculer g_{n+1}/g_n), les fonctions sont positives et boréliennes (car continues), et $\lim g_n(u) = \frac{1}{1+u}$. D'après le théorème de convergence monotone appliqué à (g_n) sur $]0,1[$, on a $\lim n(1-I_n) = \int_0^1 \frac{1}{1+u}du = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln 2$.

Exercice 4

Partie 1

1. On a $\alpha \cdot \emptyset = \emptyset$, $\alpha \cdot (A^c) = (\alpha \cdot A)^c$ et $\alpha \cdot (\bigcup A_n) = \bigcup(\alpha \cdot A_n)$. A partir de ces égalités il est facile de vérifier que $\mathscr{C}$ satisfait les trois axiomes de tribu.
2. Pour tout $a < b$, $]a,b[\in \mathscr{C}$ puisque $]a,b[$ et $\alpha\cdot]a,b[=]\alpha a, \alpha b[$ sont boréliens. Ainsi $\mathscr{C}$ est une tribu qui contient les intervalles ouverts, et donc la tribu qu'ils engendrent, qui est la tribu borélienne. On a montré $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \subset \mathscr{C}$, et l'autre inclusion est évidente. Ainsi
   $$A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \Longrightarrow A \in \mathscr{C} \Longrightarrow \alpha \cdot A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$$
   La réciproque est également vraie : on peut par appliquer ce qui précède avec α^{-1} à la place de α et remarquer que $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot A) = A$.
3. On a $\mu(\emptyset) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\alpha \cdot \emptyset) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\emptyset) = 0$ puisque λ est une mesure. Pour vérifier la σ-additivité de μ, soit (A_n) une suite de boréliens 2 à 2 disjoints. Comme $(\alpha \cdot A_n) \cap (\alpha \cdot A_k) = \alpha \cdot (A_n \cap A_k) = \emptyset$ si $n \neq k$, les $(\alpha \cdot A_n)$ sont aussi 2 à 2 disjoints et
   $$\mu(\bigcup A_n) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\alpha \cdot \bigcup A_n) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\bigcup \alpha \cdot A_n) = \frac{1}{\alpha}\sum_n \lambda(\alpha \cdot A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$
   et μ est donc une mesure.

4. Soit $a < b$. On a

$$\mu(]a,b[) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\alpha\cdot]a,b[) = \frac{1}{\alpha}\lambda(]\alpha a, \alpha b[) = \frac{\alpha b - \alpha a}{\alpha} = b - a = \lambda(]a,b[)$$

La mesure μ vérifie la propriété caractéristique de la mesure de Lebsegue. D'après le théorème d'unicité de la mesure de Lebesgue, on a donc $\lambda = \mu$.

5. Soit A un borélien ; $\alpha x \in A \iff x \in \alpha^{-1}\cdot A$, donc $\mathbf{1}_A(\alpha x) = \mathbf{1}_{\alpha^{-1}\cdot A}(x)$, et

$$\int \mathbf{1}_A(\alpha x) d\lambda(x) = \lambda(\alpha^{-1}\cdot A)$$

D'après la question précédente, $\lambda(\alpha^{-1}\cdot A) = \mu(\alpha^{-1}\cdot A) = \alpha^{-1}\lambda(\alpha\cdot\alpha^{-1}\cdot A) = \alpha^{-1}\lambda(A) = \alpha^{-1}\int \mathbf{1}_A d\lambda$. On a montré la propriété voulue pour les fonctions indicatrices ; par linéarité elle est également vraie pour les fonctions étagées postives. Soit maintenant g une fonction borélienne positive. Par le théorème d'approximation, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives telle que $\lim f_n = g$. On peut appliquer ce qui précède à (f_n) et obtenir

$$\int_{\mathbf{R}} f_n(\alpha x) d\lambda(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}} f_n(x) d\lambda(x).$$

On peut prendre la limite et appliquer le théorème de convergence monotone dans les deux membres, d'un côté à f_n et de l'autre à $x \mapsto f_n(\alpha x)$. On obtient le résultat voulu.

Partie 2

1. Soit $A = g^{-1}(\{+\infty\})$. On a pour tout n l'inégalité $n\mathbf{1}_A \leqslant g$ et donc $n\lambda(A) = \int n\mathbf{1}_A d\lambda \leqslant \int g d\lambda$. Comme $\int g d\lambda < +\infty$, on a forcément $\lambda(A) = 0$ et donc $g < +\infty$ λ-p.p.

2. Soit la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\alpha_n x).$$

On a d'après un corollaire du théorème de convergence monotone (interversion $\Sigma - \int$).

$$\int_{\mathbf{R}} g d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f(\alpha_n x) d\lambda(x).$$

On applique ensuite la question 1.5 avec α_n à la place de α

$$\int_{\mathbf{R}} g d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\int_{\mathbf{R}} f d\lambda = \left(\sum \frac{1}{\alpha_n}\right)\left(\int f d\lambda\right) < +\infty$$

D'après la question 2.1, on a donc $g < +\infty$ λ-p.p.

3. Comme le terme général d'une série convergente tend vers 0, on a d'après la question précédente que $\lim f(\alpha_n x) = 0$ λ-p.p. Comme $\sum 1/n^2 < +\infty$, on peut bien prendre $\alpha_n = n^2$.

4. Non. Par exemple la fonction $f = 1_{\mathbf{N}}$ est λ-intégrable (elle vaut 0 λ-p.p.) mais $\lim_{n\to\infty} f(n^2) = 1$.