Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen du 9 juin 2008 : corrigé succinct

Exercice 1

1a. La fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est positive et continue sur $]0,1[$. En 0 est elle équivalente à $1/t^{1-a}$ donc intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $1-a<1$. De même, elle est intégrable au voisinage de 1 si et seulement si $1-b<1$. Finalement $B(a,b)<+\infty \iff a>0$ et $b>0$.

La fonction $t \mapsto t^{c-1}e^{-t}$ est $o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ (comparaison polynôme vs exponentielle) donc intégrable. Elle est équivalente à $1/t^{1-c}$ en 0. Finalement $\Gamma(c)<+\infty \iff c>0$.

1b. Soit $V=]0,+\infty[^2$. On a $H(U)\subset V$. On pose $K(s,t)=(s+t,\frac{s}{s+t})$. On vérifie que $K(V)\subset U$ et que $H\circ K=id$, $K\circ H=id$. Ainsi H est une bijection de U sur V dont K est la bijection réciproque.

L'application H est de classe C^1 (ses coordonnées sont des fonctions polynomiales). On calcule jacobien

$$J=\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u \neq 0$$

Ainsi H est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

1c. Soit $x>0, y>0$ et En utilisant le changement de variables H, on obtient

$$I=\int_U (uv)^{a-1}(u(1-v))^{b-1}e^{-u}ud\lambda_2(u,v)=\left(\int_0^\infty u^{a+b-1}e^u du\right)\left(\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv\right).$$

La dernière égalité est justifiée par le théorème de Tonelli (fonctions boréliennes positives, mesures σ-finies). On obtient donc $I=\Gamma(a+b)B(a,b)$.

Par ailleurs, on peut directement appliquer le théorème de Tonelli pour calculer I

$$I=\left(\int_0^\infty s^{a-1}e^{-s}ds\right)\left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt\right)=\Gamma(s)\Gamma(t)$$

On obtient bien la formule demandée.

2a. En choisissant $a=b=1/2$, on obtient $B(1/2,1/2)=\Gamma(1/2)^2/\Gamma(1)$. On calcule

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^\infty=1.$$

$$B(1/2,1/2)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}dx=[-\arcsin(1-2x)]_0^1=\pi$$

On trouve donc $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

2b. Par parité, on a $J=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. En faisant le changement de variable $y=x^2$, on trouve

$$J=2\int_0^\infty \exp(-y)\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

3. Soit $S = (s_{ij})$ une matrice telle que $A = S^T S$. On a alors $a_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{jk}$. Comme A est inversible, S est aussi inversible. On effectue le changement de variables $y = Sx$, i.e. $y_i = \sum_{k=1}^n s_{ik}x_k$. D'après la formule du changement de variables linéaire, on a

$$K = \frac{1}{|\det S|} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\sum_{k=1}^n y_k^2\right) d\lambda_n(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{|\det S|} \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{k=1}^n \exp(-y_k^2) d\lambda_n(y_1, \dots, y_n)$$

En appliquant le théorème de Tonelli, on obtient

$$K = \frac{1}{|\det S|} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbf{R}} \exp(-y_k^2) dy_k = \frac{J^n}{|\det S|} = \frac{\pi^{n/2}}{|\det S|}$$

En remarquant que $\det MA = \det S \det S^T = (\det S)^2$, on arrive à la formule

$$K = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

Exercice 2

On note $M = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$; f est bornée donc $M < +\infty$.

1. On effectue le changement de variables $y = \frac{z-x}{2\sqrt{t}}$. On a

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\sqrt{t}y) \exp(-y^2) 2\sqrt{t} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\sqrt{t}y) \exp(-y^2) dy$$

Soit (t_n) une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0. La suite de fonctions continues $y \mapsto f(x + 2\sqrt{t_n}y) \exp(-y^2)$ converge vers $y \mapsto f(x) \exp(-y^2)$ et est majorée par la fonction intégrable $y \mapsto M \exp(-y^2)$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} u(x, t_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-y^2) dy = f(x)$$

d'après la valeur de J calculée à l'exercice précédent. Comme c'est valable pour toute suite tendant vers 0, on a

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x).$$

2. Soit t_n une suite qui tend vers $+\infty$. D'après l'hypothèse sur f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x + 2\sqrt{t_n}y) \exp(-y^2) = 0$ si $y \neq 0$. ($=f(x)$ si $y = 0$). En appliquant le théorème de convergence dominée de la même manière qu'à la question précédente, il vient

$$\lim_{n\to\infty} u(x, t_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathbf{1}_{\{0\}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(0) \lambda(\{0\}) = 0$$

C'est vrai pour toute suite (t_n) donc

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

3. On pose $g(x,t,z) = f(z) e^{-(x-z)^2/4t}$. Fixons $x \in \mathbf{R}$. Alors

   - La fonction $t \mapsto g(x,t,z)$ est continue à z fixé.
   - La fonction $z \mapsto g(x,t,z)$ est mesurable à t fixé.
   - Pour $0 \leqslant t \leqslant a$, $|g(x,t,z)| \leqslant M e^{-(x-z)^2/4a}$ qui est intégrable

D'après le théorème de continuité, $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(x,t,z)dz$ est donc continue sur $[0,a]$ pour tout a, donc sur $\mathbf{R}^+$. Ainsi $t \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

- La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t,z) = f(z)\frac{(x-z)^2}{4t^2}e^{-(x-z)^2/4t}$ est de classe C^1 à x fixé
- Pour $0 < a \leqslant t \leqslant b, |\frac{\partial g}{\partial t}(x,t,z)| \leqslant \frac{M}{4a^2}(x-z)^2 e^{-(x-z)^2/4b}$ qui est intégrable (car négligeable devant $1/z^2$ en $\pm\infty$).

D'après le théorème de dérivabilité, $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(x,t,z)dz$ est donc de classe C^1 sur $[a,b]$ pour tout $0 < a < b$, donc sur $\mathbf{R}_+^*$. Ainsi $t \mapsto u(x,t)$ est C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et l'on a (dérivation d'un produit).

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}}dz + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{(x-z)^2}{4t^2}e^{-(x-z)^2/4t}dz$$

4. Fixons $t > 0$. Alors

- La fonction $x \mapsto g(x,t,z)$ est continue (et même C^2 pour anticiper) à z fixé.
- La fonction $z \mapsto g(x,t,z)$ est mesurable à x fixé.
- Soit $x \in [-a,a]$. On a $(z-x)^2 \geqslant z^2 - 2a|z| - a^2$, d'où $|g(x,t,z)| \leqslant Me^{(-z^2+2a|z|+a^2)/4t}$ qui est intégrable (car négligeable devant $1/z^2$ en $\pm\infty$).

D'après le théorème de continuité, $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(x,t,z)dz$ est continue sur $[-a,a]$ pour tout a, donc sur $\mathbf{R}$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t,z) = -f(z)\frac{x-z}{2t}e^{-(x-z)^2/4t}$, que l'on peut majorer lorque $x \in [-a,a]$ par $M\frac{a+|z|}{2t}\exp((-z^2+2a|z|+a^2)/4t)$ qui est intégrable comme précédemment. Par le théorème de dérivabilité, $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(x,t,z)dz$ est de classe C^1. On peut appliquer ce même théorème à la dérivée. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t,z) = -f(z)\frac{1}{2t}e^{-(x-z)^2/4t} + f(z)\frac{(x-z)^2}{4t^2}e^{-(x-z)^2/4t}$$

L'utilisation du théorème est justifiée par la majoration

$$|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t,z)| \leqslant M\left(\frac{1}{2t} + \frac{(a+|z|)^2}{4t^2}\right)e^{-(-z^2+2a|z|+a^2)/4t}$$

Ainsi $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^2 et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} -f(z)\frac{1}{2t}e^{-(x-z)^2/4t} + f(z)\frac{(x-z)^2}{4t^2}e^{-(x-z)^2/4t}dz.$$

5. Il suffit de vérifier que les deux formules coïncident.