Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Examen du 9 juin 2008

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Les 4 exercices sont indépendants. Le barème proposé est indicatif et pourra être modifié. Pour la correction, l'accent sera mis sur la qualité de la rédaction : **un résultat exact mais non justifié vaut 0 point.**

Durée : 3 heures.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et pour $n \geqslant 1$, $\lambda_n = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

Question de cours (2 points)

Enoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 1 (9 points)

Pour $a, b, c > 0$, on pose $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ et $\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1}e^{-t}dt$

1a. A quelles conditions sur a, b a-t-on $B(a,b) < +\infty$? A quelle condition sur c a-t-on $\Gamma(c) < +\infty$?.

1b. Soit $H : (u,v) \to (s,t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,1[$ sur un ouvert V à préciser.

1c. Soit $a > 0, b > 0$ et

$$I = \int_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*} s^{a-1}t^{b-1}e^{-(s+t)}d\lambda_2(s,t).$$

En calculant I de deux manières différentes (l'une d'elles utilisant le changement de variables H), montrer que pour tous $a, b > 0$,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{1}$$

2a. En choisissant $a = b = 1/2$ dans la formule (1), calculer $\Gamma(1/2)$. Indication : on pourra remarquer que $1-(1-2x)^2 = 4x(1-x)$.

2b. Déduire de la question précédente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique et définie positive. Calculer l'intégrale

$$K = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j\right) d\lambda_n(x_1,\cdots,x_n).$$

Indication : on rappelle que toute matrice symétrique positive s'écrit sous la forme $A = S^TS$, où $S \in M_n(\mathbf{R})$ et S^T désigne sa matrice transposée. On pourra utiliser le changement de variables $y = Sx$.

Exercice 2 (9 points)

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue bornée. Pour $t > 0$, on pose

$$u(x,t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} \, dz.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x).$$

   Indication : on pourra commencer par effectuer un changement de variables. On pourra aussi utiliser le résultat de la question 2b de l'exercice précédent.

2. On suppose (dans cette question seulement) que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0.$$

3. Montrer que à $x \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que à $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ (on tolèrera une rédaction plus légère pour cette question seulement).

5. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}, t > 0$, la fonction u satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$