Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 2
Fonctions mesurables.

Fonctions mesurables.

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) L'ensemble $[2,3[\cap \mathbf{Q}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.
(2) Une fonction $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
(3) Si $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est mesurable et $g : (X_2, \mathscr{T}_2) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée, alors $gof : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée.
(4) Si $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbf{R}$ vérifie que pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$, alors f est mesurable.
(5) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
(6) L'ensemble $A = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.

Exercice 2 Soit $A \subset X$. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

Exercice 3 (**Examen juin 2007 2ème session**).
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est borélienne.

Exercice 4 Soit $f : X \to \mathbf{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $f(x) \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est mesurable.

Exercice 5 Soit $f : X \to \mathbf{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| < M \\ M \text{ si } f(x) \geqslant M \\ -M \text{ si } f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :
(A) f est mesurable.
(B) $\forall M > 0, f_M$ est mesurable.

Exercice 6 Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbf{R}$ dans les cas suivants :
(1) $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
(2) $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée f' est borélienne.

Exercice 8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 9 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge}\}$ et $B = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$. Montrer que A et B sont dans $\mathscr{T}$.
(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit $g : X \to \mathbf{R}$ par $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 10 On note $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer que toute fonction constante appartient à $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$.
(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ mais que la réciproque est fausse.

(c) Soit $X = \mathbf{R}$ et $\mathscr{T}_s$ la tribu dans X engendrée par les singletons. Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}_s)$ si et seulement si il existe un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante.

Exercice 11 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). Soit f une fonction de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer qu'il existe sur X une plus petite tribu, notée $\mathscr{T}_f$ telle que $f : (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbf{R}$ soit mesurable.
(b) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$.
(c) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la fonction "partie entière".
(d) On revient au cas général. Soit $g : X \to \mathbf{R}$ une autre fonction. Montrer que g est mesurable (pour la tribu $\mathscr{T}_f$) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$.

Exercice 12 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). On note $B(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbf{R}$. Si $f \in B(X)$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On remarquera que $B(X)$ est un espace vectoriel.

Soit E un sous-espace vectoriel de $B(X)$. On dit que E est régulier s'il vérifie
(i) $\mathbf{1}_X \in E$
(ii) Si f et g appartiennent dans E, alors $\max(f, g)$ appartient à E.
(iii) Si (f_n) est une suite d'éléments de E telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < \infty$ et qui converge simplement vers une fonction f, alors f appartient à E.

1. Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X et $BM(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui sont bornées et mesurables (pour $\mathscr{T}$). Montrer que $BM(X, \mathscr{T})$ est un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$.
2. Réciproquement, soit E un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$. On va construire une tribu $\mathscr{T}$ dans X telle que $E = BM(X, \mathscr{T})$.
   (a) Soit $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{P}(X) \text{ t.q. } \mathbf{1}_A \in E\}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu dans X.
   (b) Montrer que $BM(X, \mathscr{T}) \subset E$.
   (c) On fixe $f \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leqslant \alpha\}$ et $g = \max(f, \alpha) - \alpha$. Montrer que $g(x) = 0 \iff x \in A$. On pose ensuite pour $n \geqslant 1$, $g_n = n \inf(g, 1/n)$. Quelle est la limite simple de la suite (g_n) ? En déduire que $A \in \mathscr{T}$, puis que $f \in BM(X, \mathscr{T})$. Conclure.