

Feuille d'exercices numéro 5
Théorème de convergence monotone.

Exercice 1 Soit μ une mesure sur (X, \mathcal{F}) et $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}^+}$ une application mesurable.

(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq 1\}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f^n d\mu$.

(b) On suppose $\int_X f d\mu < +\infty$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A^c} f^n d\mu$.

Exercice 2 (Partiel automne 2006) Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

1) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f . On suppose que f_0 est intégrable (c'est-à-dire que $\int f_0 d\mu < \infty$). Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_{\mathbf{R}} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, I_n < \infty$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Exercice 3 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} d\mu(t)$.

(a) Montrer que la fonction F est à valeurs dans $[0, 1]$.

(b) Montrer que la fonction F est décroissante.

(c) Soit (x_n) une suite croissante de réels positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$.
Conclusion ?

Exercice 4 (Partiel automne 2006)

1) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit $(a_{n,k})_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite telle que :

(H1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}^*, a_{n,k} \geq 0$;

(H2) pour tout entier n fixé, la suite $(a_{n,k})_{k \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

On note $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k}$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable. Soit (μ_k) une suite de mesures sur \mathcal{F} telles que :

(H) pour tout $A \in \mathcal{F}$, la suite $(\mu_k(A))$ est croissante.

Pour $A \in \mathcal{F}$, on note $\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A)$.

En utilisant la question 1, montrer que μ est une mesure sur \mathcal{F} .

3) Sous les hypothèses de la question 2, montrer que pour toute fonction $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, f \mathcal{F} -mesurable, la suite $(\int f d\mu_k)$ est croissante (on pourra commencer par le cas où f est étagée).

4) Sous les hypothèses de la question 2, montrer que pour toute fonction $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, f \mathcal{F} -mesurable, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 5 (Partiel avril 2007)

(a) Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans \mathbf{R} , alors

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n(x) \right) dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 6 (Partiel avril 2007)

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 7 (Examen juin 2007)

Soient (E, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré et $f : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

(1) On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ -intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

(2) On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ -intégrable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.