

Feuille d'exercices numéro 7
Fonctions définies par des intégrales.

Exercice 1 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $t \rightarrow \cos(xt)$ est μ -intégrable sur \mathbf{R}^+ . On pose alors pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \cos(xt) d\mu(t)$.

(2) Montrer que F est continue sur \mathbf{R}^+ .

(3) On suppose que l'application $t \rightarrow t^2$ est μ -intégrable. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - F(x)}{x^2}$. On pourra remarquer et justifier l'inégalité $1 - \cos(u) \leq u^2/2$.

(4) On ne suppose plus que $t \rightarrow t^2$ est μ -intégrable, mais on suppose que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - F(x)}{x^2} = 0$.

(4a) Soit G définie sur \mathbf{R}^+ par $G(x) = \frac{1 - F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur \mathbf{R}^+ .

(4b) En déduire que $t \rightarrow t^2$ est μ -intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.

(4c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 2 Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt \right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} dt$.

(1a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur \mathbf{R}^+ .

(1b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.

(2) En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-t^2) dt$ puis de $J = \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2) dt$.

Exercice 3 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixt} e^{-t^2/2} dt$.

(1) Montrer que F est continue sur \mathbf{R} .

(2) Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R} .

(3a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.

(3b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 4 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right) dt$.

(1) Montrer que F est continue sur \mathbf{R} .

(2) Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R}^* .

(3) Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

(4) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 5 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t, x) = \frac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \rightarrow f(t, x)$ est λ -intégrable sur \mathbf{R}^+ .

Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty f(t, x) dx$.

(2a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.

(2b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(2c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 6 Pour $y > 0$, soit $F(y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2} dx$.

(1) Montrer que F est continue sur \mathbf{R}^+ . Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y)$.

(2a) Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R}_+^* .

(2b) Montrer que F vérifie sur \mathbf{R}_+^* une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$.

(2c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geq 0$.

(2d) Retrouver enfin la valeur de I .

Exercice 7 (examen juin 2007, 2ème session)

On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha x^2)}{1 + x^2} dx$.

- 1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geq 0$.
- 2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
- 3) Montrer que I est continue en 0.
- 4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
- 4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
- 4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 8 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} \frac{dt}{1+t^2}$.

- (1) Montrer que F et G sont continues sur \mathbf{R} . Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
- (2) Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

- (3a) Montrer que G est de classe C^2 sur \mathbf{R} et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x .
- (3b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur \mathbf{R}_+^* et vérifie une équation différentielle du second ordre.
- (3c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur \mathbf{R}). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x .
- (4) Déduire de tout cela la valeur de la constante C .

Exercice 9

- (1) Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \rightarrow t^{x-1}e^{-t}$ est λ -intégrable sur \mathbf{R}^+ .
- (2) Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$. Montrer que Γ est continue sur \mathbf{R}_+^* . Montrer ensuite que Γ est de classe C^∞ sur \mathbf{R}_+^* .

Exercice 10 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+^* .
2. Pour $x > 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 11 (*) Soit $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbf{R} . Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.
2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx$.