

Feuille d'exercices numéro 8
Mesures produits

Exercice 1 On désigne par λ (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x, x); x \in [0, 1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de \mathbf{R}^2 ? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\Delta}(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$. Montrer que f est λ_2 -intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)} dy.$$

Exercice 3 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x, t) = \frac{1}{(1 + x^2 t^2)(1 + y^2 t^2)}$.

1. Montrer que f_y est λ_2 -intégrable sur $[0, 1] \times \mathbf{R}^+$.
2. Soit $g(y, t) = \int_0^1 f_y(x, t) dx$. Justifier que g est λ_2 -intégrable sur $[0, 1] \times \mathbf{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t]); G_\mu(t) = \mu(]t, +\infty[); H_\mu(t) = \mu(\{t\}).$$

1. Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.
- 2a. Soit ν une autre mesure sur $\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que $\nu(\mathbf{R}) = 1$. Montrer que $\int_{\mathbf{R}} F_\mu d\nu = \int_{\mathbf{R}} G_\nu d\mu$.
- 2b. Soit $D_\mu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\nu(t) \neq 0\}$. Justifier que les ensembles D_μ et D_ν sont au plus dénombrables et montrer l'égalité suivante

$$\int_{\mathbf{R}} F_\mu d\nu + \int_{\mathbf{R}} F_\nu d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{t\})\nu(\{t\}) = 1.$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_s^\mu = H_s^\nu \implies \mu = \nu$.

1. Montrer que H_s est continue sur \mathbf{R} et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Déterminer $\lim_{s \rightarrow 0^+} sH_s(a)$.
3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b H_s(x) dx$.

4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ telles que $\mu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 6 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales
2. La fonction f est-elle λ_2 -intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 7 (Examen juin 2007)

Pour x réel, soit $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2 \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du$.

- (a) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur \mathbf{R} .
- (b) Montrer que F est dérivable sur \mathbf{R}^* , et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.
- (c) En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.
- (d) Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur \mathbf{R}^2 et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 8

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ n'est pas λ -intégrable sur \mathbf{R}^+ . On peut néanmoins définir l'intégrale comme suit, à condition que la limite existe

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

2. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \exp(-xy) \sin(x)$. La fonction f est-elle λ_2 -intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$?
3. Montrer que f est λ_2 -intégrable sur $[0, A] \times \mathbf{R}^+$ pour tout nombre $A > 0$.
4. En déduire la valeur de I .

Exercice 9 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour x réel, on pose

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{R}} \exp(ixt) d\mu(t).$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur \mathbf{R} .
2. Soit $n \geq 1$ et $a \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(-iax) \phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}} K_n(t-a) d\mu(t)$$

où K_n est une fonction que l'on explicitera.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(-iax) \phi(x) dx$.
4. En déduire que si ϕ est λ -intégrable sur \mathbf{R} , alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 10

En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^1 e^{-x} \sin(2xy) dy dx,$$

déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.