Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen partiel du 21 avril 2008

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Les 4 exercices sont indépendants. Le barème proposé est indicatif et pourra être modifié. Pour la correction, l'accent sera mis sur la qualité de la rédaction : **un résultat exact mais non justifié vaut 0 point.**

Durée : 2 heures.

Exercice 1 (Question de cours — 2 points)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Rappeler la définition de l'intégrale d'une fonction étagée, puis de l'intégrale d'une fonction mesurable positive.

Exercice 2 (3 points)

Soit $X = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments.

1. Déterminer la tribu $\mathscr{T} = \sigma(\{A, B, C\})$, où $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ et $C = \{c, d\}$ (n'écrivez pas plus de quelques lignes pour justifier votre réponse).
2. Donner un exemple de fonction $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ qui n'est pas mesurable.

Exercice 3 (5 points)

Soit $(I_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Calculer la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer à l'aide d'un changement de variables que $n(1 - I_n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} du$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - I_n)$.

Exercice 4 (12 points)

On note $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On rappelle qu'une propriété $P(x)$ est vraie λ-p.p. si

$$\lambda(\{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } P(x) \text{ est fausse}\}) = 0.$$

Partie 1

Soit α un nombre réel strictement positif. Si $A \subset \mathbf{R}$, on note $\alpha \cdot A$ l'ensemble

$$\alpha \cdot A = \{\alpha x, x \in A\}.$$

Par exemple, $\alpha \cdot [a, b] = [\alpha a, \alpha b]$.

1. Soit $\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } \alpha \cdot A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu.

2. En déduire que $\mathscr{C} = \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Montrer que $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \Longrightarrow \alpha \cdot A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. La réciproque est-elle vraie ?

3. On définit une application $\mu : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to [0, +\infty]$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{\alpha}\mu(\alpha \cdot A).$$

   Montrer que μ est une mesure.

4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, $\mu(A) = \lambda(A)$.

5. En déduire le résultat suivant : si $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction borélienne positive, alors

$$\int_{\mathbf{R}} g(\alpha x) d\lambda(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbf{R}} g(x) d\lambda(x).$$

   Indication : on pourra d'abord montrer la formule d'abord pour g la fonction indicatrice d'un borélien, en montrant que $\mathbf{1}_A(\alpha x) = \mathbf{1}_{\alpha \cdot A}(x)$.

Partie 2

On suppose que $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ une fonction positive λ-intégrable, et on étudie le comportement à l'infini de f.

1. Soit $g : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ une fonction positive λ-intégrable. Montrer que $g < +\infty$ λ-p.p.

2. Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < +\infty$. Montrer à l'aide des questions (1.5) et (2.1) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\alpha_n x) < +\infty \qquad \lambda - \text{p.p.}$$

3. En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} f(n^2 x) = 0 \qquad \lambda - \text{p.p.}$$

4. Est-il vrai que si $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ est une fonction λ-intégrable, alors

$$\lim_{n \to \infty} f(n^2) = 0 \ \ ?$$