Correction de l'exercice 11 feuille 4

1. Oui, f est mesurable car c'est la limite d'une suite de fonctions mesurables.
2. On a $E_n^k = \cap_{p \geqslant n} (f_p - f)^{-1}([-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}])$. Comme $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ est borélien (car fermé) et $f_p - f$ est mesurable, l'ensemble $(f_p - f)^{-1}([-1/k, 1/k])$ est dans $\mathscr{T}$, et donc E_n^k aussi car la tribu $\mathscr{T}$ est stable par intersection dénombrable.

   Comme $[\![n+1, +\infty [\![\subset [\![n, +\infty [\![$, on a $E_{n+1}^k \supset E_n^k$ (l'intersection pour E_{n+1}^k est prise sur un ensemble d'indices plus petit, donc le résultat est plus gros).

   On a $[-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}] \subset [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, et on en déduit facilement que $E_n^{k+1} \subset E_n^k$.
3. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Si $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. En appliquant la définition de la limite, on obtient l'existence d'un entier n tel que pour $p \geqslant n$, on a $|f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k$. Ainsi $x \in E_n^k$, ce qui montre que $X = \bigcup_n E_n^k$.

   Comme la suite $(E_n^k)_n$ est croissante, on en déduit que $\mu(X) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n^k)$. Soit $\eta > 0$, il existe alors un entier n_k tel que $\mu(E_{n_k}^k) \geqslant \mu(X) - \eta$, ce qui implique $\mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \eta$. Cette dernière opération est licite car on a supposé que $\mu(X) < +\infty$. Pour obtenir le résultat demandé par l'énoncé, on applique ceci avec $\eta = \varepsilon / 2^k$.
4. Soit $A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} X \setminus E_{n_k}^k$, où n_k est défini à la question précédente. On a

   $$\mu(A) \leqslant \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

   De plus $X \setminus A = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} E_{n_k}^k$, donc si $x \in X \setminus A$, on a

   $$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall p \geqslant n_k, |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Et donc

   $$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall p \geqslant n_k, \sup_{x \in X \setminus A} |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Ceci montre que la suite de fonctions (f_n) converge vers f uniformément sur A.