Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Devoir maison
Construction de la mesure de Lebesgue : correction

Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, on note $\ell(I)$ sa longueur. Pour n'importe quelle partie $A \subset \mathbf{R}$, on définit $\lambda^*(A)$ comme

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \ell(I_n) \right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'intervalles ouverts telles que $A \subset \bigcup I_n$. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbf{R}$ telles que pour tout $B \subset \mathbf{R}$, on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap A^c).$$

1. **Montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B$, alors $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$.**
   C'est une conséquence facile de la définition.
2. **Montrer que pour tout $a < b$, on a $\lambda^*([a, b]) = \lambda^*(]a, b[) = b - a$.**
   Soit (I_k) une suite d'intervalles ouverts dont l'union recouvre $[a, b]$. L'intervalle $[a, b]$ étant compact, par la propriété de Borel–Lebesgue, il existe un sous-recouvrement (appelons-le $J_1, \dots, J_n$) qui recouvre $[a, b]$. On peut de plus supposer que ce recouvrement est minimal, ce sui implique que pour tous $i \neq j$, $J_i \not\subset J_j$.
   Soit $J_i =]a_i, b_i[$. On peut supposer (quitte à renuméroter les intervalles) que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. La condition de non-inclusion implique alors que $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.
   Pour $a \leqslant x \leqslant b$, soit $i(x)$ le plus petit indice i tel que $x \in J_{i(x)}$. Soit K_i l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $i(x) = i$. On a bien sûr $K_i \subset J_i$, et K_i est un intervalle (si $x \leqslant y \leqslant z$ et $i(x) = i(z) = i$, alors $i(y) \leqslant i$ car $J_{i(x)}$ est un intervalle, et si $i(y) < i$ il est facile de voir que la condition de non-inclusion est violée). Ainsi $(K_1, \dots, K_n)$ est une partition finie de $[a, b]$ en intervalles. Soient $c_i \leqslant d_i$ les extrémités de K_i. Alors $c_{i+1} = d_i$ et donc

$$b - a = d_n - c_1 = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) = \sum_{i=1}^{n} \ell(K_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ell(J_i) \leqslant \sum_{k\in\mathbf{N}} \ell(I_k).$$

   En prenant l'infimum sur toutes les suites (I_k), on obient $\lambda^*([a, b]) \geqslant b - a$.
   Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, $[a, b] \subset]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ et donc $\lambda^*([a, b]) \leqslant (b + \varepsilon) - (a - \varepsilon)$ (considérer la suite $I_0 =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ et $I_k = \emptyset$ pour $k > 0$). En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\lambda^*([a, b]) = b - a$. On démontre de même que $\lambda^*(]a, b[) = b - a$.
3. **Montrer que si $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de parties de $\mathbf{R}$, alors**

$$\lambda^* \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i \right) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda^*(A_i).$$

   Soit $\varepsilon > 0$ et $i \in \mathbf{N}$. Par définition de λ^*, il existe une suite d'intervalles ouverts $(I_k^{(i)})_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $A_i \subset \bigcup_k (I_k^{(i)})$ et

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} \ell(I_k^{(i)}) \leqslant \lambda^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

   L'ensemble $\{I_k^{(i)}\}_{i,k\in\mathbf{N}}$ est dénombrable (réunion dénombrable d'ensembles dénombrables), et peut donc être énuméré en une suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On a

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n = \bigcup_{i,k\in\mathbf{N}} I_k^{(i)} \supset \bigcup_i A_i$$

et donc

$$\lambda^*\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} J_n = \sum_{i,k\in\mathbf{N}} \ell(I_k^{(i)}) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\lambda^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda^*(A_i).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien l'inégalité voulue.

4. **Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$, alors $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{L}$.**
Il découle de la question précédente que l'on a toujours $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\cap A^c)$; c'est l'inclusion opposée qui n'est pas vraie a priori.
Soient $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$. On a alors puisque $A_1 \in \mathscr{L}$

$$\lambda^*(B\cap(A_1\cup A_2)) = \lambda^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1)+\lambda^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1^c) = \lambda^*(B\cap A_1)+\lambda^*(B\cap A_1^c\cap A_2).$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}\lambda^*(B\cap(A_1\cup A_2)) + \lambda^*(B\cap(A_1\cup A_2)^c) &= \lambda^*(B\cap A_1) + \lambda^*(B\cap A_1^c\cap A_2) + \lambda^*(B\cap A_1^c\cap A_2^c)\\ &= \lambda^*(B\cap A_1) + \lambda^*(B\cap A_1^c)\\ &= \lambda^*(B)\end{aligned}$$

Les deux dernières égalités découlent de $A_2 \in \mathscr{L}$ et $A_1 \in \mathscr{L}$. On a donc bien montré $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{L}$.

5. **Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de parties de $\mathbf{R}$ deux à deux disjointes, avec $A_k \in \mathscr{L}$ pour tout entier k, alors $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k \in \mathscr{L}$.**
Soit $B \subset \mathbf{R}$. Montrons par récurrence que pour tout entier m, on a

$$\lambda^*(B) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^*(B\cap A_k) + \lambda^*\left(B \cap \bigcap_{k=0}^{m} A_k^c\right)$$

Pour $m = 0$ c'est vrai car $A_0 \in \mathscr{L}$. Supposons l'égalité au rang m. Alors comme $A_{m+1} \in \mathscr{L}$,

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{m} A_k^c\right) &= \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{m} A_k^c \cap A_{m+1}\right) + \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{m+1} A_k^c\right)\\ &= \lambda^*(B\cap A_{m+1}) + \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{m+1} A_k^c\right)\end{aligned}$$

car les (A_k) sont disjoints. On conclut alors facilement la récurrence.
Ce que l'on a montré implique que

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{k=0}^{m} \lambda^*(B\cap A_k) + \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k^c\right)$$

d'où en faisant tendre m vers l'infini

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^*(B\cap A_k) + \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k^c\right) \geqslant \lambda^*\left(B\cap\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) + \lambda^*\left(B\cap\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k^c\right)$$

où la seconde inégalité découle le la question 3. En vertu de la remarque faite au début de la question 4., ceci montre que $\bigcup A_k \in \mathscr{L}$.

6. **Montrer que $\mathscr{L}$ est une tribu.**
Il est évident que $\emptyset \in \mathscr{L}$ et que $\mathscr{L}$ est stable par complémentaire. Soit maintenant (B_k) une suite d'éléments de $\mathscr{L}$. On pose $A_k = B_k \setminus (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$, de sorte que (A_k) sont deux à deux disjoints, et $\bigcup A_k = \bigcup B_k$. Comme $\mathscr{L}$ est stable par complémentaire et par union finie (question 4), on obtient $A_k \in \mathscr{L}$. La question 5. montre alors que $\bigcup A_k \in \mathscr{L}$, et donc $\mathscr{L}$ est stable par union dénombrable : c'est une tribu.

7. **Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a $]-\infty, a] \in \mathscr{L}$, et donc que tout borélien est dans $\mathscr{L}$.**
Nous allons montrer que pour tout $B \subset \mathbf{R}$, on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B\cap\,]-\infty, a]) + \lambda^*(B\cap\,]a, +\infty]).$$

Soit $(]a_i, b_i[)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'intervalles dont l'union recouvre B. Posons

$$I_i =]\min(a_i, a), \min(b_i, a) + \varepsilon/2^i[,$$

$$J_i =]\max(a_i, a), \max(b_i, a)[.$$

On vérifie que $B\cap\,]-\infty, a] \subset \bigcup I_i$ et $B\cap\,]a, +\infty] \subset \bigcup J_i$. On a donc

$$\lambda^*(B\cap\,]-\infty, a]) + \lambda^*(B\cap\,]a, +\infty]) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \ell(I_i) + \sum_{i\in\mathbf{N}} \ell(J_i) = 2\varepsilon + \sum_{i\in\mathbf{N}} \ell(]a_i, b_i[)$$

En faisant tendre ε vers 0, cela donne

$$\lambda^*(B\cap\,]-\infty, a]) + \lambda^*(B\cap\,]a, +\infty]) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \ell(]a_i, b_i[).$$

Prenons l'infimum sur tout les choix d'intervalles dont l'union recouvre B, cela donne

$$\lambda^*(B\cap\,]-\infty, a]) + \lambda^*(B\cap\,]a, +\infty]) \leqslant \lambda^*(B).$$

L'autre inégalité étant toujours vraie, ceci montre que $]-\infty, a] \in \mathscr{L}$.

8. **Montrer que λ^* est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{L})$.**
Soit (A_k) une suite d'éléments de $\mathscr{L}$, deux à deux disjoints. On a montré au cours de la question 5. que pour tout $B \subset \mathbf{R}$,

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^*(B \cap A_k) + \lambda^*\left(B \cap \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k^c\right)$$

En choisissant $B = \bigcup A_k$, cela donne

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right) \geqslant \sum_{k\in\mathbf{N}} \lambda^*(A_k).$$

On a montré l'autre inégalité à la question 3. Ceci montre que λ^* est une mesure (en restriction à $\mathscr{L}$).

Ne vous inquiétez pas si vous avez trouvé ce devoir infaisable. Il était effectivement très difficile ; la construction de la mesure de Lebesgue est certainement le point le plus ardu de l'ensemble du programme de licence.