Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

Devoir maison
Construction de la mesure de Lebesgue

Avertissement. Ce DM n'a rien d'obligatoire, et est d'un niveau plus élevé que les exercices figurant dans les feuilles de TD. Il s'agit en fait de traiter une partie du programme que l'on n'a pas le temps de faire en cours. Ce DM est destiné en priorité aux étudiants qui ont déjà bien compris le cours et qui souhaitent aller plus loin (par exemple en vue d'un master). Je conseille aux étudiants dont l'unique but est d'obtenir $10+\varepsilon$ à l'examen final de concentrer leurs efforts sur la compréhension du cours et les nombreux exercices figurant sur les feuilles de TD.

Le but de ce devoir est de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une mesure λ sur la tribu borélienne de $\mathbf{R}$ tel que pour tous réels $a<b$, on a $\lambda(]a,b[) = b-a$.

Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, on note $\ell(I)$ sa longueur. Pour n'importe quelle partie $A \subset \mathbf{R}$, on définit $\lambda^*(A)$ comme

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \ell(I_n) \right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'intervalles ouverts telles que $A \subset \bigcup I_n$. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbf{R}$ telles que pour tout $B \subset \mathbf{R}$, on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B \cap A^c).$$

1. Montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B$, alors $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$.
2. Montrer que pour tout $a<b$, on a $\lambda^*([a,b]) = \lambda^*(]a,b[) = b-a$. On pensera à utiliser la propriété de Borel–Lebesgue : de tout recouvrement d'un compact par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
3. Montrer que si $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de parties de $\mathbf{R}$, alors
$$\lambda^*\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda^*(A_i).$$
4. Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$, alors $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{L}$.
5. Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de parties de $\mathbf{R}$ deux à deux disjointes, avec $A_k \in \mathscr{L}$ pour tout entier k, alors $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k \in \mathscr{L}$.
6. Montrer que $\mathscr{L}$ est une tribu.
7. Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a $]-\infty, a] \in \mathscr{L}$, et donc que tout borélien est dans $\mathscr{L}$.
8. Montrer que λ^* est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{L})$. Félicitations, vous avez construit la mesure de Lebesgue !

Compléments. La tribu $\mathscr{L}$ ainsi construite (appelée souvent tribu de Lebesgue) vérifie $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{P}(\mathbf{R})$. On peut montrer que ces deux inclusions sont strictes. Même si λ^* est défini sur $\mathscr{P}(\mathbf{R})$, il n'est pas vrai que c'est une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbf{R})$. C'est seulement en restriction à $\mathscr{L}$ que l'axiome M2 (σ-additivité) est vérifié.