Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen du 4 juin 2009 : corrigé succinct

Exercice 1 Voir cours

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(t) = |\cos(\pi t)|^n$. La suite (f_n) converge simplement vers $\mathbf{1_Z}$, $|f_n| \leqslant 1$ et la fonction 1 est μ-intégrable car $\mu(\mathbf{R}) < +\infty$. Par le théorème de convergence dominée, la limite cherchée vaut

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1_Z} d\mu = \mu(\mathbf{Z}).$$

Exercice 3

1. On vérifie l'inégalité $\sqrt{\alpha+\beta} \leqslant \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ en élevant les deux membres au carré. On a alors pour $t \in [0, A]$ et $x \in [0,1]$, $\sqrt{\varphi(x)^2 + t} \leqslant |\varphi(x)| + \sqrt{A}$. La fonction $|\varphi| + \sqrt{A}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. De plus la fonction $(x,t) \mapsto \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$ est continue en t à x fixé et mesurable en x à t fixé. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre implique que F est continue sur $[0, A]$. Comme c'est vrai pour tout $A > 0$, F est continue sur $\mathbf{R}^+$.

2. Si $t \neq 0$, la fonction $(x,t) \mapsto \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$ est dérivable en t à x fixé (car la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbf{R}^+_*$) et cette dérivée vaut $\frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2+t}}$. Si $t > \varepsilon > 0$, on majore cette dérivée par $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, qui est intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre implique que F est dérivable sur $[\varepsilon, +\infty[$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient que F est dérivable sur R^+_*, et pour $t > 0$,

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t}} dx$$

3. Si $1/\varphi$ est supposée intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre sur $[0,1]$ avec comme fonction majorante $1/2\varphi$. Alors F est dérivable sur $\mathbf{R}^+$.

4. Supposons que F est dérivable en 0. Soit (t_n) une suite décroissant vers 0. Alors par le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to\infty} F'(t_n) = \int_0^1 \frac{1}{2\varphi(x)} dx.$$

Comme c'est vrai pour toute telle suite (t_n), on conclut que

$$\lim_{t\downarrow 0} F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{2\varphi(x)} dx.$$

Par le théorème de prolongement de la dérivée, on a $F'(0) = \int_0^1 \frac{1}{2\varphi(x)} dx$, ce qui montre que cette dernière intégrale a une valeur finie, et donc $1/\varphi$ est intégrable.

Exercice 4

1. On a $|f(t,x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, et l'intégrale sur $\mathbf{R}^+$ vaut $[\arctan x]_0^{+\infty} = \pi/2$.

2. On a déjà calculé $F(0) = \pi/2$. Si $t_1 \leqslant t_2$, alors $f(t_1, x) \geqslant f(t_2, x)$ pour tout x, et donc en intégrant $F(t_1) \geqslant F(t_2)$. Soit maintenant une suite (t_n) tendant vers $+\infty$; une application du théorème de convergence dominée (avec pour fonction dominante $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$) donne

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f(t_n, x) dx = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\}}(x) dx = 0$$

Comme ceci est vrai pour toute suite (t_n) tendant vers $+\infty$, on a

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

3. La fonction $(t,x) \mapsto f(t,x)$ est continue en t à x fixé, et mesurable en x à t fixé. De plus elle est dominée pour tout t par la fonction intégrable $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres implique que F est continue sur $\mathbf{R}^+$. De plus, la fonction f est dérivable en t à x fixé, et
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}$$
donc si $t \geqslant \varepsilon > 0$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant e^{-\varepsilon x^2}.$$
La fonction $x \mapsto e^{-\varepsilon x^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$: la seule difficulté est au voisinage $+\infty$ où l'on remarque que $x^2 e^{-\varepsilon x^2}$ tend vers 0 (croissances comparées), donc $e^{-\varepsilon x^2} = o(1/x^2)$ et cette dernière fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $x \mapsto e^{-\varepsilon x^2}$ aussi. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre implique alors que F est dérivable sur $[\varepsilon, +\infty[$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, F est en fait dérivable sur $\mathbf{R}_*^+$.

   On peut montrer que F n'est pas dérivable en 0 en utilisant le théorème de convergence monotone de la même manière qu'à la fin de l'exercice précédent.

4. En utilisant le théorème de Tonelli, on écrit
$$J(a) = \int_0^\infty t^a \left(\int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}dx\right) dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty t^a e^{-tx^2} dt\right) dx.$$
Effectuons le changement de variables $u = tx^2$ (valide pour $x > 0$) dans l'intégrale intérieure :
$$J(a) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty x^{-2(a+1)}u^a e^{-u} du\right) dx = \left(\int_0^\infty \frac{1}{x^{2a+2}(1+x^2)}dx\right)\left(\int_0^\infty u^a e^{-u} du\right)$$
Etudions la convergence de chacune de ces intégrales ; la première converge au voisinage de 0 si et seulement si $2a+2 < 1$ et au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $2a+4 > 1$. La seconde converge au voisinage de 0 si et seulement si $a > -1$ et converge toujours au voisinage de $+\infty$ (on vérifie que la fonction intégrée est $o(1/x^2)$ par croissance comparées). Finalement $J(a) < +\infty$ si et seulement si $-1 < a < -1/2$.

Exercice 5

1. $A = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n$, et donc A est borélien car une tribu est stable par union et intersection dénombrables.

2. On a $x \in A$ si et seulement si il existe une sous-suite $(\sigma(n))$ tel que $x \in A_{\sigma(n)}$ pour tout n, autrement dit $\mathbf{1}_A = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Donc $1 - \mathbf{1}_A = \liminf_{n\to\infty}(1 - \mathbf{1}_{A_n})$. Ces fonctions sont boréliennes positives, donc d'après le lemme de Fatou,
$$\int_{[0,1]} (1-\mathbf{1}_A)d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1-\mathbf{1}_{A_n})d\lambda$$
$$1 - \lambda(A) \leqslant 1 - 1/2$$
et donc $\lambda(A) \geqslant 1/2$

3. En prenant $A_n = [0,1/2]$, on a $A = [0,1/2]$ et donc $\lambda(A) = 1/2$. En prenant $A_n = [0,1/2]$ lorsque n est pair et $A_n = [1/2,1]$ lorsque n est impair, on a $A = [0,1]$ et donc $\lambda(A) = 1$.