Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Examen du 4 juin 2009

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Les exercices sont indépendants. Le barème proposé est indicatif et pourra être modifié. Pour la correction, l'accent sera mis sur la qualité de la rédaction : **un résultat exact mais non justifié vaut 0 point.**

Durée : 3 heures.

Exercice 1 (Questions de cours — 4 points)

1. Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Quand dit-on qu'une fonction f est μ-intégrable ?
2. Énoncer le théorème qui affirme l'existence et l'unicité de la mesure-produit (attention à bien en préciser les hypothèses).

Exercice 2 (3 points) Soit μ une mesure finie sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$. Donner la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |\cos(\pi t)|^n d\mu(t)$$

Exercice 3 (6 points) Soit $\varphi : [0,1] \to]0,+\infty[$ une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue). On définit une fonction $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ par

$$F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\ dx$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$ (*on pourra par exemple utiliser, en la démontrant, l'inégalité* $\sqrt{\alpha+\beta} \leqslant \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ *pour* $\alpha, \beta \geqslant 0$).
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+_*$.
3. On suppose dans cette question que la fonction $1/\varphi$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$). Montrer alors que F est dérivable en 0.
4. Réciproquement, on suppose que F est dérivable en 0 (*rappel : le théorème de prolongement de la dérivée affirme que si* $\lim_{t\downarrow 0} F'(t)$ *existe dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *alors cette limite est dans* $\mathbf{R}$ *et vaut* $F'(0)$). Monter que la fonction $1/\varphi$ est intégrable.

Exercice 4 (7 points)

Pour tous nombres réels x et t, on note $f(t,x) = \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebsegue sur $\mathbf{R}^+$.

   Pour tout $t \geqslant 0$, on note $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty f(t,x)dx$.
2. Montrer que $F(0) = \pi/2$, que la fonction F est décroissante et calculer sa limite en $+\infty$.
3. Étudier la continuité et la différentiabilité de F sur $\mathbf{R}^+$ (*on pourra se restreindre à* $\mathbf{R}^+_*$ *si besoin*).
4. Pour tout réel a, on pose $J(a) = \displaystyle\int_0^\infty t^a F(t)dt$. Déterminer pour quelles valeurs de a on a $J(a) < +\infty$ (*on pourra effectuer un changement de variable pour écrire* $J(a)$ *comme le produit de deux intégrales*).

T.S.V.P.

Exercice 5 (4 points)

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Soit (A_n) une suite de parties boréliennes de $[0,1]$, avec pour tout n, $\lambda(A_n) = \frac{1}{2}$. On note A l'ensemble des $x \in [0,1]$ qui appartiennent à une infinité des A_n :

$$A = \{x \in [0,1] \text{ t.q. } \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant N \text{ t.q. } x \in A_n\}.$$

1. Montrer que A est borélien.
2. Montrer que $\lambda(A) \geqslant \frac{1}{2}$ (*on pourra écrire* $\mathbf{1}_A$ *en fonction de* $\mathbf{1}_{A_n}$ *et utiliser le lemme de Fatou*).
3. Donner un exemple avec $\lambda(A) = \frac{1}{2}$, et un autre exemple avec $\lambda(A) = 1$.