

Feuille d'exercices numéro 1
Intégrale de Riemann

Première approche du théorème de convergence dominée

Exercice 1 : révisions sur les intégrales convergentes/divergentes)

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles convergent (et éventuellement pour quelles valeurs des paramètres α et β) ?

$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} 1+\frac{1}{1+x^2}dx \qquad (2)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{\sin x}{x^3}}dx$$

$$(3)\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{2x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx \qquad (4)\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}dx$$

$$(5)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx \qquad (6)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2e^{-t}}dt$$

$$(7)\ \int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}dt \qquad (8)\ \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$$

Exercice 2 Pour chacune des suites de fonctions données, montrer que $J_n = \int_I f_n(x)dx$ converge et calculer la limite de la suite (J_n).

a) $I=[0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}$ où $1<\alpha<2$.

b) $I = [A,+\infty[$ où $A>0$ et $f_n(x) = \dfrac{n^2x\exp(-n^2x^2)}{1+x^2}$.

c) $I=[0,1]$ et $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[}(x)$.

Exercice 3 On pose $f_n(x) = n(1-x)^n\sin^2(nx)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite (f_n).

b) Justifier que, $\forall u \geqslant 0, 1-u \leqslant \exp(-u)$.

c) En déduire que la suite $(\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx)_n$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que $\int_0^\infty f(x)dx$ existe. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \exp(-n\sin^2 x)f(x)dx.$$

Exercice 5 (**Examen juin 2007**) On considère pour $n\in\mathbf{N}, n\geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $\int_0^\infty f_n(x)dx$ converge.

(2) Démontrer que pour $n\geqslant 2$ et $x\geqslant 1$, on a $f_n(x)\leqslant \frac{4}{x^2}$.

(3) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 6 (**Examen janvier 2009**) On considère pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, les fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}.$$

1. Montrer que pour chaque $n \geqslant 2$, l'intégrale $I_n := \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.
2. Montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 (*) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$, $I_n = \displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^\infty g_n(x)dx$.

1. Montrer que $I_n J_n = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Exercices plus abstraits sur l'intégrale de Riemann

Exercice 8 La définition de la Riemann-intégrabilité fait intervenir une inégalité entre une borne supérieure et une borne inférieure. Une inégalité est toujours vraie même si la fonction n'est pas Riemann-intégrable ; laquelle ?

Exercice 9 Montrer que la somme de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier, et que la formule $\int f+g = \int f + \int g$ est vraie pour les fonctions en escalier. En déduire que la somme de deux fonctions Riemann-intégrables est Riemann-intégrable, et que la formule $\int f+g = \int f + \int g$ est vraie pour les fonctions Riemann-intégrables.

Exercice 10 Montrer que la fonction indicatrice des rationnels $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable.

Exercice 11 On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann-intégrale. En considérant la fonction $\mathbf{1}_{]0,1]}$, montrer que la composition de deux fonctions Riemann-intégrables n'est pas forcément Riemann-intégrable.