Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Calcul intégral

**Feuille d'exercices numéro 2**
Tribus.

**Exercice 1 Vrai ou Faux ?**
**(1)** Soit $E$ un ensemble. Alors $A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$.
**(2)** Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Alors $E \in \mathscr{T}$.
**(3)** $\mathscr{T}$ est une tribu sur $E$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
- $\emptyset \in \mathscr{T}$.
- $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A^c \in \mathscr{T}$.
- $(\forall n \in \mathbf{N}, A_n \in \mathscr{T}) \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathscr{T}$.

**(4)** Si $E$ est dénombrable et $\mathscr{T}$ est une tribu sur $E$, alors $\mathscr{T}$ est dénombrable.
**(5)** La tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par les fermés de $\mathbf{R}$.
**(6)** Un borélien est soit un ouvert, soit son complémentaire (c'est-à-dire un fermé).

**Exercice 2** Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

**Exercice 3** Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $A, B$ des éléments de $\mathscr{T}$. Montrer que $A \cap B \in \mathscr{T}$ et $A \Delta B \in \mathscr{T}$.

**Exercice 4** Les classes suivantes sont-elles des tribus ?
(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. $A$ est finie $\}$.
(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. $A$ est finie ou $A^c$ est finie $\}$.
(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. $A$ est au plus dénombrable ou $A^c$ est au plus dénombrable $\}$.

**Exercice 5** Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Déterminer la tribu engendrée $\sigma(\mathscr{A})$ dans les cas suivants :
(a) $\mathscr{A} = \{A\}$, où $A$ est une partie fixe de $X$.
(b) $\mathscr{A} = \{\{x\}, x \in X\}$. On séparara le cas où $X$ est fini ou dénombrable et le cas où $X$ n'est pas au plus dénombrable.
(c) $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. $A_0 \subset A\}$, où $A_0$ est une partie fixe de $X$.

**Exercice 6** Combien y a-t-il de tribus différentes sur un ensemble à 3 éléments ? Sur un ensemble à 4 éléments ?

**Exercice 7** (**Examen juin 2008 session 2**) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{T}$. Soit $B$ la partie définie par

$$B = \{x \in X \text{ pour lesquels il existe un unique } n \in \mathbf{N} \text{ tel que } x \in A_n\}.$$

Montrer que $B \in \mathscr{T}$.

**Exercice 8** Montrer que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux classes de parties de $X$ telles que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{B})$. Montrer ensuite que $\sigma(\sigma(\mathscr{A})) = \sigma(\mathscr{A})$.

**Exercice 9** Soit $f : X \to Y$ une fonction entre deux ensembles.
(a) Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur $X$. Donner un exemple montrant que $\{f(A), A \in \mathscr{A}\}$ n'est pas nécessairement une tribu sur $Y$. Montrer qu'en revanche $\{B \in \mathscr{P}(Y)$ t.q. $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur $Y$.
(b) Soit $\mathscr{B}$ une tribu sur $Y$. Monter que l'ensemble $f^{-1}[\mathscr{B}] := \{f^{-1}(B), B \in \mathscr{B}\}$ est une tribu sur $X$. Montrer que si $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ alors $f^{-1}[\mathscr{B}] = \sigma(\{f^{-1}(B), B \in \mathscr{E}\})$.

**Exercice 10 Tribu engendrée par une partition.** Soit $\pi = \{A_i\}_{i \in I}$ une partition de $X$. Déterminer $\sigma(\pi)$ :
(a) Lorsque $I$ est au plus dénombrable.
(b) Lorsque $I$ n'est pas au plus dénombrable.

**Exercice 11 (Partiel avril 2007)** On rappelle que la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par la famille des intervalles ouverts $]a, b[$, $a < b$. En déduire que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est aussi la tribu engendrée par la famille $\mathscr{C}$ suivante :

$$\mathscr{C} = \{]-\infty, t], t \in \mathbf{R}\}.$$

**Exercice 12 La tribu borélienne de $\mathbf{R}$.** On munit $\mathbf{R}$ de la métrique usuelle et on note $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu borélienne de $\mathbf{R}$.
(1) Montrer que tout ouvert, tout fermé et tout intervalle de $\mathbf{R}$ sont des boréliens.
(2) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est engendrée par une classe dénombrable.
(3) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ n'est pas engendrée par une partition de $\mathbf{R}$.
(4) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_a = \{B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ t.q. $B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}\}$. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est une tribu. En déduire que $\forall B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}, B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On dit que la tribu borélienne est invariante par translation.
(5) Soit $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}} = \{B \in \mathscr{B}_R$ t.q. $B = -B\}$. Montrer que $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}}$ est une tribu, que l'on appelle tribu des boréliens symétriques.

**Exercice 13** On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}$.
(1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}_n = \{[\![0, n]\!], \{n+1\}, \{n+2\}, \cdots\}$ et $\mathscr{T}_n = \sigma(\mathscr{A}_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}_n)$ est une suite décroissante. On note ensuite $\mathscr{T} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}_n$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \mathbf{N}\}$.
(2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}'_n = \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n-1\}, [\![n, +\infty[\![\}$ et $\mathscr{T}'_n = \sigma(\mathscr{A}'_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}'_n)$ est croissante. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}'_n$ n'est pas une tribu.

**Exercice 14** (*) On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $n\mathbf{N}^*$ l'ensemble des multiples non nuls de $n$. Soit les classes $\mathscr{A} = \{n\mathbf{N}^*, n \geqslant 1\}$ et $\mathscr{A}' = \{p\mathbf{N}^*, p \geqslant 1, p$ premier$\}$. Montrer que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(X)$, mais que $\sigma(\mathscr{A}') \neq \mathscr{P}(X)$.

**Exercice 15** Soit $X$ un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une classe de parties de $X$. Montrer que pour chaque ensemble $C \in \sigma(\mathscr{A})$, il existe une sous-classe au plus dénombrable $\mathscr{A}_C \subset \mathscr{A}$ telle que $C \in \sigma(\mathscr{A}_C)$.

**Exercice 16** Soient $X$ et $Y$ deux ensembles au plus dénombrables. Montrer que le produit des tribus complètes est la tribu complète du prosuit cartésien, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.