

**Feuille d'exercices numéro 3**  
Fonctions mesurables.

## Fonctions mesurables.

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace mesurable  $(X, \mathcal{F})$ .

### Exercice 1 Vrai ou Faux ?

- (1) L'ensemble  $[2, 3[ \cap \mathbf{Q}$  est un borélien de  $\mathbf{R}$ .
- (2) Une fonction  $f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{F}_2)$  qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
- (3) Si  $f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{F}_2)$  est mesurable et  $g : (X_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{F}_3)$  est étagée, alors  $g \circ f : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_3, \mathcal{F}_3)$  est étagée.
- (4) Si  $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$  vérifie que pour tout fermé  $F \subset \mathbf{R}$ ,  $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ , alors  $f$  est mesurable.
- (5) Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est borélienne et ne s'annule pas, alors  $1/f$  est borélienne.
- (6) L'ensemble  $A = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \cos(x) = \sin(\sin x)\}$  est un borélien de  $\mathbf{R}$ .
- (7) Toute fonction constante de  $(X, \mathcal{F})$  dans  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$  est mesurable.

**Exercice 2** Soit  $A \subset X$ . Montrer que la fonction  $\mathbf{1}_A$  est mesurable si et seulement si  $A \in \mathcal{F}$ .

**Exercice 3 (Examen juin 2007 2ème session).**

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est borélienne.

**Exercice 4** Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable et  $g : X \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $g(x) = 1$  si  $f(x) \in \mathbf{Q}$  et  $g(x) = 0$  sinon. Montrer que  $g$  est mesurable.

**Exercice 5** Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ . On définit pour tout  $M > 0$  la fonction  $f_M$  par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < M \\ M & \text{si } f(x) \geq M \\ -M & \text{si } f(x) \leq -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :

(A)  $f$  est mesurable.

(B)  $\forall M > 0, f_M$  est mesurable.

**Exercice 6** Décrire les fonctions mesurables de  $(X, \mathcal{F})$  dans  $\mathbf{R}$  dans les cas suivants :

(1)  $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$ .

(2)  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ .

**Exercice 7** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable. Montrer que la dérivée  $f'$  est borélienne.

**Exercice 8** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction monotone. Montrer que  $f$  est borélienne.

**Exercice 9** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ .

(a) Soit  $A = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge}\}$  et  $B = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathcal{F}$ .

(b) Soit  $a \in \mathbf{R}$ . On définit  $g : X \rightarrow \mathbf{R}$  par  $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f_n(x) \geq a\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = 0$ . Montrer que  $g$  est mesurable.

**Exercice 10 (Partiel novembre 2008)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction partie entière,  $f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ .

On note  $\mathcal{B}$  la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{E} = f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ .

1. Soit  $B \in \mathcal{B}$ . Montrer que  $f^{-1}(B) = \bigcup_{n \in B \cap \mathbb{Z}} [n, n+1[$ . En déduire que  $f$  est borélienne, et que la tribu  $\mathcal{E}$  est engendrée par une partition que l'on précisera.
2. Donner un exemple d'une partie  $A \subset \mathbb{R}$  telle que  $A \in \mathcal{B}$  et  $A \notin \mathcal{E}$ .
3. Montrer que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = x^2$  n'est pas mesurable de  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

**Exercice 11**

(a) Montrer que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$  est mesurable, alors  $|f|$  est aussi mesurable. La réciproque est-elle vraie ?

(b) Soit  $X = \mathbf{R}$  et  $\mathcal{T}_s$  la tribu dans  $X$  engendrée par les singletons. Montrer que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$  est mesurable si et seulement si il existe un ensemble  $D \subset \mathbf{R}$  au plus dénombrable tel que  $f|_{D^c}$  soit constante.

**Exercice 12** Soit  $X$  un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur  $X$ ). On note  $B(X)$  l'ensemble des fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ . Si  $f \in B(X)$ , on pose  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ . On remarquera que  $B(X)$  est un espace vectoriel.

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $B(X)$ . On dit que  $E$  est régulier s'il vérifie

- (i)  $\mathbf{1}_X \in E$
- (ii) Si  $f$  et  $g$  appartiennent dans  $E$ , alors  $\max(f, g)$  appartient à  $E$ .
- (iii) Si  $(f_n)$  est une suite d'éléments de  $E$  telle que  $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < \infty$  et qui converge simplement vers une fonction  $f$ , alors  $f$  appartient à  $E$ .

1. Soit  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $X$  et  $BM(X, \mathcal{T})$  l'ensemble des fonctions de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  qui sont bornées et mesurables (pour  $\mathcal{T}$ ). Montrer que  $BM(X, \mathcal{T})$  est un sous-espace vectoriel régulier de  $B(X)$ .
2. Réciproquement, soit  $E$  un sous-espace vectoriel régulier de  $B(X)$ . On va construire une tribu  $\mathcal{T}$  dans  $X$  telle que  $E = BM(X, \mathcal{T})$ .
  - (a) Soit  $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } \mathbf{1}_A \in E\}$ . Montrer que  $\mathcal{T}$  est une tribu dans  $X$ .
  - (b) Montrer que  $BM(X, \mathcal{T}) \subset E$ .
  - (c) On fixe  $f \in E$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ . On pose  $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leq \alpha\}$  et  $g = \max(f, \alpha) - \alpha$ . Montrer que  $g(x) = 0 \iff x \in A$ . On pose ensuite pour  $n \geq 1$ ,  $g_n = n \inf(g, 1/n)$ . Quelle est la limite simple de la suite  $(g_n)$ ? En déduire que  $A \in \mathcal{T}$ , puis que  $f \in BM(X, \mathcal{T})$ . Conclure.