Feuille d'exercices numéro 4
Mesures

Sauf mention contraire, μ dénote une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
(2) Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
(3) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
(4) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
(5) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
(6) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
(7) La mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ est σ-finie.

Exercice 2 On rappelle que μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n. Montrer que si μ est σ-finie, on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 3 (**Examen juin 2008 session 2**) Répondez aux affirmations suivantes par VRAI ou par FAUX. On désigne par $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré quelconque.

(A) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{T}$ deux à deux disjoints, on a : $\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

(B) Pour tous $A, B \in \mathscr{T}$, on a l'équivalence : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \iff A \cap B = \emptyset$.

(C) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{T}$, on a : $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(D) La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ est σ-finie.

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable tel que la tribu $\mathscr{T}$ contient les singletons. Soit μ une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$. On note $D = \{x \in X \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}$. Montrer que D est au plus dénombrable. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose plus que la mesure est finie ? Et si on suppose que la mesure est σ-finie ?

Exercice 5
(a) Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A\Delta B)$.
(b) Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X)$. Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.
(c) Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geqslant \dfrac{\mu(X)}{n}$.

Exercice 6 **(Partiel automne 2006)** Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par
$$\mathscr{T}' = \{A \in \mathscr{T} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$
Montrer que $\mathscr{T}'$ est une tribu dans X.

Exercice 7 (**Partiel automne 2008**) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$. On définit $\mu(\cdot|B)$ de $\mathcal{A}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ par
$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$

1. Montrer que $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$.

2. Supposons à présent que μ est la mesure géométrique de paramètre 1/2 sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k.$$

Soit $B = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs. Calculer $\mu(B)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|B)$. En déduire que $\mu(\cdot|B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} \delta_{2k}$.

Exercice 8 (**Partiel automne 2009**) Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{T}$-mesurable. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$B_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}.$$

1. Justifier que $B_n \in \mathcal{T}$, pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite $(\mu(B_n))_n$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Soit $\epsilon > 0$. En déduire qu'il existe une application $g : X \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \epsilon.$$

Exercice 9 **Mesure image.** Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{T}')$ des espaces mesurables, et $\phi : X \to Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. On définit $\nu : \mathscr{T}' \to [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.
(a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}'$. On dit que c'est la mesure image de μ par ϕ, et on la note $\phi_*\mu$.
(b) On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in X$. Déterminer $\phi_*\delta_a$.
(c) On suppose que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ vérifiant $\mu(X) = 1$. On fixe $B \in \mathscr{T}$ et on choisit $(Y, \mathscr{T}') = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$. Déterminer $(\mathbf{1}_B)_*\mu$.

Exercice 10 **Fonction de répartition.** Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $F(t) = \mu(]-\infty, t[)$.
(a) Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.
(b) Montrer que F est croissante.
(c) Déterminer les limites de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
(d) Montrer que F est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur $\mathbf{R}$.

On suppose désormais que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(e) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de $\mathbf{R}$. On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
(f) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
(g) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F. Que vaut $\nu(]-\infty, x[)$ pour $x \in \mathbf{R}$?
(h) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\frac{1}{2}(b-a)$ et tel que $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$.

Exercice 11 (Théorème d'Egoroff, **Partiel avril 2007**)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f.

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$

Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}\cdot$ Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?

3. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.