Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 5

Mesure de Lebesgue. Intégration.

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'une propriété $P(x)$ est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) si $\mu(\{x \text{ t.q. } P(x) \text{ est fausse}\}) = 0$. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 (**Partiel avril 2007**)

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ qui vérifie les conditions suivantes :

(C_1) $\forall x \in \mathbf{R}, \mu(\{x\}) = 0$.

(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbf{Q}) = 0\cdot$
3. Soit $A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$. On définit la fonction f_A comme suit :
$$f_A : \begin{cases} \mathbf{R} \to [0, +\infty[\\ x \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$
Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbf{Q}$.
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbf{R}$. Même question pour $A = [0, 1]$ (il est inutile de justifier le tracé des graphes).

Exercice 2 Invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

1) On a vu précédemment que si $x \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$.

(a) On fixe $x \in \mathbf{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_\mathbf{R} \to [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) = \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$.

(b) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$. On dit que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

2) Soit μ une mesure sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ vérifiant $\mu([0, 1]) = 1$ et $\mu(x + I) = \mu(I)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$.

(a) Soit B un borélien borné de $\mathbf{R}$; montrer que $\mu(B) < +\infty$. En déduire que μ est σ-finie.

(b) Montrer que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi la mesure μ est diffuse.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose
$$F(t) = \begin{cases} \mu([0, t[) \text{ si } t \geqslant 0 \\ -\mu([t, 0[) \text{ si } t \leqslant 0 \end{cases} .$$

(c) Montrer que si $0 \leqslant s \leqslant t$, alors $F(t) - F(s) = F(t - s)$.

(d) En déduire que $F(nt) = nF(t), \forall n \in \mathbf{N}, \forall t \geqslant 0$.

(e) Montrer que cette égalité est encore vraie pour $n \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$.

(f) En déduire que pour tout $r \in \mathbf{Q}$ et $t \in \mathbf{R}$, on a $F(rt) = rF(t)$. Calculer $F(r)$, d'abord pour $r \in \mathbf{Q}$ puis pour tout $r \in \mathbf{R}$.

(g) Déduire de tout cela que $\mu = \lambda$.

Quelles sont les mesures sur $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ qui sont invariantes par translation ?

Exercice 3

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda - \text{p.p.} \iff f = g$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les deux propriétés suivantes :
(P1) : f est continue λ-p.p.
(P2) : Il existe une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p.p.
Donner l'exemple d'une fonction f_1 qui vérifie (P1) mais qui ne vérifie pas (P2), et d'une fonction f_2 qui vérifie (P2) mais qui ne vérifie pas (P1).

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.
5. Soit A un borélien de $\mathbf{R}$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ par $f(x) = \lambda(A \cap [-x, x])$. Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que f est continue, puis que pour tout $t \in [0, \lambda(A)]$, il existe un borélien B tel que $B \subset A$ et $\lambda(B) = t$.

Exercice 4 Vrai ou Faux ?

(1) Si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f d\mu = \mu(A)$.
(2) Si $f : E \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$, alors f est intégrable.
(3) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 5 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :
(a) μ est une mesure de Dirac.
(b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$.

Exercice 6 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Montrer que :
(a) $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty$ μ-p.p.
(b) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-p.p.