Université Claude Bernard
 Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 6
Théorème de convergence monotone.

Exercice 1 Soit μ une mesure sur $(X,\mathscr{T})$ et $f : X \to \overline{\mathbf{R}^+}$ une application mesurable.
(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_A f^n d\mu$.
(b) On suppose $\int_X f d\mu < +\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{A^c} f^n d\mu$.

Exercice 2 (**Partiel automne 2006**) Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R},\mathscr{B}_\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.
1) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f. On suppose que f_0 est intégrable (c'est-à-dire que $\int f_0 d\mu < \infty$). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_\mathbf{R} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $I_n < \infty$.
3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
4) Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 3 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+,\mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.
Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} d\mu(t)$.
(a) Montrer que la fonction F est à valeurs dans $[0,1]$.
(b) Montrer que la fonction F est décroissante.
(c) Soit (x_n) une suite croissante de réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Conclusion ?

Exercice 4 (**Partiel automne 2006**)
1) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit $(a_{n,k})_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que :
(H1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}^*, a_{n,k} \geqslant 0$;
(H2) pour tout entier n fixé, la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
On note $a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2) Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit (μ_k) une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :
(H) pour tout $A \in \mathscr{T}$, la suite $(\mu_k(A))$ est croissante.
Pour $A \in \mathscr{T}$, on note $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$.
En utilisant la question **1**, montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.
3) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathscr{T}$-mesurable, la suite $(\int f d\mu_k)$ est croissante (on pourra commencer par le cas où f est étagée).
4) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathscr{T}$-mesurable, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 5 (**Partiel avril 2007**)
(a) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans $\mathbf{R}$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x) \right) dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 6 (**Partiel avril 2007**)

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 7 (**Examen juin 2007**)

Soient $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

(1) On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

(2) On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.