Feuille d'exercices numéro 7
Théorème de convergence dominée.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 (**Examen juin 2008 session 2**). Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$.

Indication : Comment majorer $\sin u$ lorsque u est proche de 0 ?

Exercice 2 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable.
1) Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n = \{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geqslant n\}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f d\mu$.
2) On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A \in \mathscr{T}, \mu(A) < +\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_A f^{1/n} d\mu$.

Exercice 3 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$ et $\int_{\mathbf{R}} \exp(a|t|) d\mu(t) < +\infty$, $\forall a \geqslant 0$.
a) Montrer que $t \longmapsto t^n$ est μ-intégrable pour tout entier positif n.
b) Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $t \longmapsto \exp(zt)$ est μ-intégrable.
c) On pose $F(z) = \int_{\mathbf{R}} \exp(zt) d\mu(t)$. Montrer que F a un développement en série entière de la forme

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n,$$

où l'on explicitera les coefficients (a_n).

Exercice 4 Soit μ une mesure finie sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$m_k = m_k(\mu) = \int_{[0,1]} t^k d\mu(t).$$

a) Déterminer $\lim_{k\to\infty} m_k$.
b) Pour $\gamma > 0$, $p \in \mathbf{N}$, $a \in]0,1]$, on pose

$$J_p(\gamma, a) = \int_{[0,1]} \exp\left(-\gamma (t/a)^p\right) d\mu(t).$$

Montrer que

$$J_p(\gamma, a) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\gamma^k}{a^{pk}} m_{pk}.$$

c) Déterminer $\lim_{p\to\infty} J_p(\gamma, a)$.
d) Soient μ et ν deux mesures finies sur $[0,1]$ vérifiant $m_k(\mu) = m_k(\nu), \forall k \in \mathbf{N}$. Déduire de ce qui précède que pour tous a, b dans $[0,1]$ vérifiant $a < b$, on a $\mu([a,b[) = \nu([a,b[)$.
e) En déduire que $\mu = \nu$.

Exercice 5 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré ; on suppose que la mesure μ est finie. Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction $\mathscr{T}-$ mesurable et, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}^+$ une fonction telle que, pour tout $n \geqslant 1$, f^n est $\mu-$ intégrable. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$, $B = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > 1\}$ et $J_n = \int_X f^n d\mu$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

(b) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.

(c) $\mu(B) = 0$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(d) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}J_n$ est convergente.

(e) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(f) $\mu(A) = 0$.

Exercice 7 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions $\mu-$ intégrables convergente vers 0 μ-pp. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n\right) d\mu.$$

On pourra utiliser les résultats du cours de L2 sur les séries alternées.