Feuille d'exercices numéro 8
Fonctions définies par des intégrales.

Exercice 1 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)dt\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}dt$.
(1a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.
(1b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(2) En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ puis de $J = \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)dt$.

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixt}e^{-t^2/2}dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$.
(3a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
(3b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 3 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
(3) Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.
(4) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 4 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t, x) = \frac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.
(1) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \to f(t, x)$ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty f(t, x)dx$.
(2a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
(2b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
(2c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 5 (examen juin 2008, 2ème session)
Pour $y > 0$, soit $F(y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x^2y)}{1+x^2}dx$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y\to+\infty} F(y)$.
(2a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*_+$.
(2b) Montrer que F vérifie sur $\mathbf{R}^*_+$ une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)dx$.
(2c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geqslant 0$.
(2d) Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 6 (examen juin 2007, 2ème session)
On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}dx$.

1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*_+$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3) Montrer que I est continue en 0.

4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.
(1) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbf{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
(2) Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

(3a) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
(3b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
(3c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbf{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
(4) Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

Exercice 8 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 9 (*) Soit $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}dx$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 10 (**Examen Janvier 2009**)

1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $x > 0$.

2. Etablir que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

3.

a. En utilisant la relation obtenue en **2.** et l'inégalité $t^x \leqslant 1 + t$, valable pour $0 < x \leqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\Gamma(x) = 1$.

b. Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\Gamma(x) \geqslant \int_x^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geqslant x^{x-1}e^{-x}.$$

c. A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \Gamma(x)$.

4. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

5. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en précisant l'expression intégrale de $\Gamma'(x)$ pour $x > 0$.

6. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)\,dt$. Montrer que $F(x)$ est bien définie et que l'on a

$$F(x) = \frac{\Gamma'(1) - \ln(x)}{x}.$$

7. *(Question bonus)* Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}dt.$$

En déduire que si l'on définit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, on a : $\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

Exercice 11 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.
(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $t \to \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On pose alors pour $x \geqslant 0, F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \cos(xt) d\mu(t)$.
(2) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
(3) On suppose que l'application $t \to t^2$ est μ-intégtrable. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{1 - F(x)}{x^2}$. On pourra remarquer et justifier l'inégalité $1 - \cos(u) \leqslant u^2/2$.
(4) On ne suppose plus que $t \to t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - F(x)}{x^2} = 0$.
(4a) Soit G définie sur $\mathbf{R}^+$ par $G(x) = \frac{1 - F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbf{R}^+$.
(4b) En déduire que $t \to t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.
(4c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 12 (**Examen juin 2008**). Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue bornée. Pour $t > 0$, on pose

$$u(x, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} dz.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x).$$

   Indication : on pourra commencer par effectuer un changement de variables. On pourra aussi utiliser le résultat de la question 2b de l'exercice précédent.
2. On suppose (dans cette question seulement) que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = 0.$$

3. Montrer que à $x \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que à $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ (on tolèrera une rédaction plus légère pour cette question seulement).
5. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}, t > 0$, la fonction u satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$