Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 9
Mesures produits

Exercice 1 **Vrai ou Faux ?** Soit $(E_1, \mathscr{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathscr{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis.
(1) La mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ est σ-finie.
(2) Si μ_1 et μ_2 sont sans atome, alors $\mu_1 \otimes \mu_2$ aussi.
(3) Tout élément de $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ est une union dénombrable de pavés mesurables.

Exercice 2 Soit $(E_1, \mathscr{T}_1)$ et $(E_2, \mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables. Pour $C \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ et $x \in E_1$, on note $C_x = \{y \in E_2 \text{ t.q. } (x, y) \in C\}$. Montrer que $C_x \in \mathscr{T}_2$.

Exercice 3 On désigne par λ (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x,x); x \in [0,1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbf{R}^2$? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 4 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, $\mu = \delta_1 + 2\delta_2$ et $\nu = \lambda \otimes \mu$.
Calculer $\int_{\mathbf{R}^2} f d\nu$ lorsque $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}$.

Exercice 5 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}$.

1. Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
2. Soit $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$. (Indication : on pourra décomposer $f_y(x,t)$ en éléments simples).

Exercice 6 (**Examen janvier 2009**) Soit μ et ν des mesures finies sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_\mathbf{R})$. On suppose que μ et ν sont diffuses (i.e. telles que la mesure d'un singleton soit nulle). Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \mu([0,x])$ et $G(x) = \nu([0,x])$. Soit $a > 0$ et $T = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant x\right\}$.
1. Justifier que T est un borélien de $\mathbf{R}^2$.
2. En calculant de deux façons $(\mu \otimes \nu)(T)$ montrer que l'on a :

$$\int_{[0,a]} F d\nu + \int_{[0,a]} G d\mu = F(a)G(a).$$

Exercice 7 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_\mathbf{R} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_s^\mu = H_s^\nu \Longrightarrow \mu = \nu$.

1. Montrer que H_s est continue sur $\mathbf{R}$ et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} sH_s(a)$.

3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b H_s(x)dx$.
4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ telles que $\mu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 8 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 9 (**Examen juin 2008 session 2**). Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction λ-intégrable sur $\mathbf{R}$. On définit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par $g(x, y) = f(x + y)$. Montrer que la fonction g est λ_2-intégrable sur $[a, b] \times [a, b]$ pour tous réels a, b $(a < b)$.

Exercice 10 (**Examen juin 2007**)

Pour x réel, soit $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du.$

(a) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.

(c) En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.

(d) Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 11

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ n'est pas λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On peut néanmoins définir l'intégrale comme suit, à condition que la limite existe

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{def}{=} \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

2. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \exp(-xy) \sin(x)$. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$?
3. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[0, A] \times \mathbf{R}^+$ pour tout nombre $A > 0$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 12 Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$. Pour x réel, on pose $\phi(x) = \int_\mathbf{R} \exp(ixt)d\mu(t)$.

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(-iax)\phi(x)dx = \int_\mathbf{R} K_n(t - a)d\mu(t)$$

   où K_n est une fonction que l'on explicitera.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(-iax)\phi(x)dx$.
4. En déduire que si ϕ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 13

En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^1 e^{-x} \sin(2xy)dydx,$$

déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.