1 Rappels

1.1 Cardinaux

Définition 1 *Soient X et Y deux ensembles.*

1. *On dit que X et Y ont même* **cardinal** *et on note $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ lorsqu'il existe une application bijective entre X et Y.*
2. *On note $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ (ou $\operatorname{card} Y \geqslant \operatorname{card} X$) lorsqu'il existe une application injective de X dans Y.*
3. *On note $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ lorsque l'on a $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ et $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y$.*

Proposition 2 *Soit X un ensemble quelconque. Alors $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathscr{P}(X)$.*

Théorème 3 (Bernstein) *Soient X et Y deux ensembles.*

1. *$\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ si et seulement si il existe une application surjective de Y dans X*
2. *Si $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ et $\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X$, alors $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.*

Définition 4 *Soit X un ensemble.*

1. *On dit que X est* **infini** *si $\operatorname{card} X \geqslant \operatorname{card} \mathbf{N}$.*
2. *On dit que X est* **dénombrable** *si $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbf{N}$*
3. *On dit que X est* **au plus dénombrable** *(a.p.d.) si $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbf{N}$.*

Proposition 5

1. *Les ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}^d$ (où d est un entier) sont infinis dénombrables.*
2. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont a.p.d., alors $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est a.p.d.*
3. *Les ensembles $\mathbf{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sont infinis non dénombrables.*

1.2 Intégrale de Riemann

Définition 6 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est dite* **en escalier** *s'il existe des réels $a_1 < \cdots < a_{n-1}$ dans $[a,b]$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que (en posant $a_0 = a$ et $a_n = n$) f est constante égale à λ_i sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.*

L'intégrale d'une telle fonction est alors définie par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

Définition 7 *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est dite* **intégrable au sens de Riemann** *si*

$$\sup_{\phi \leqslant f} \int_a^b \phi(x)dx = \inf_{\psi \geqslant f} \int_a^b \psi(x)dx,$$

où le supremum/infimum est pris sur les fonctions en escalier. On définit alors $\int_a^b f(x)dx$ comme la valeur commune de ces deux nombres.

Définition 8 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est* **réglée** *si elle admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.*

Par exemple, les fonctions continues ou continues par morceaux sont réglées. Cette notion sera généralisée dans un chapitre ultérieur par la notion de fonction *borélienne*.

Théorème 9 *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ réglée est Riemann-intégrable.*

Proposition 10 (Lien avec les primitives) *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors la fonction F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$.*

Définition 11 *Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, et (I_n) une suite croissante de segments telle que $\bigcup I_n = I$. Soit f une fonction continue (ou réglée) positive. On dit que $\int_I f(x)dx$* **converge** *si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_n} f(x)dx < +\infty.$$

Par exemple, si $I =]0,1]$, on peut prendre $I_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Si $I = [0, +\infty[$, on peut prendre $I_n = [0, n]$.

Proposition 12 (Intégrales de référence) *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$*
- *L'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
- *L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*

Proposition 13 (Comparaison)
1. *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\int_I g(x)dx$ converge, alors $\int_I f(x)dx$ converge.*
2. *Si f et g sont positives et si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de chacune des extrémités de I, alors $\int_I f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_I g(x)dx$ converge.*

Un des objectifs du cours sera de construire une autre théorie de l'intégration : l'intégrale de Lebesgue. Cette théorie sera plus maniable que l'intégrale de Riemann, bien que paraissant plus compliquée. Elle permettra de démontrer par exemple le théorème suivant ; il serait difficile d'en donner une démonstration reposant sur l'intégrale de Riemann.

Théorème 14 (Théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Riemann) *Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $(f_n) : I \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions réglées. On suppose que*
- *(f_n) converge ponctuellement vers f et que f est réglée.*
- *Il existe une fonction $g : I \to \mathbf{R}^+$ telle que $|f_n| \leqslant g$ et $\int_I g(x)dx$ converge.*

Alors

$$\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Ce théorème est admis pour l'instant et sera démontré et généralisé dans un chapitre ultérieur. Dans la plupart des applications, les fonctions (f_n) et f sont en fait continues ou continues par morceaux.

2 Tribus

Définition 15 *Une* **tribu** *sur un ensemble E est un ensemble $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(E)$ formé de parties de E tel que*

(T1) $\emptyset \in \mathscr{T}$.

(T2) $A \in \mathscr{T} \Longrightarrow E \setminus A \in \mathscr{T}$.

(T3) Si (A_n) est une famille <u>dénombrable</u> d'éléments de $\mathscr{T}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{T}$.

Les axiomes T2 et T3 impliquent qu'une tribu est également stable par intersection dénombrable.

Définition 16 *Si $\mathscr{T}$ est une tribu sur E, on dit que $(E, \mathscr{T})$ est un* **espace mesurable**.

Définition 17 *Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$. La* **tribu engendrée par** *$\mathscr{A}$, notée $\sigma(\mathscr{A})$, est l'intersection de toutes les tribus dans lesquelle $\mathscr{A}$ est incluse*

$$\sigma(\mathscr{A}) = \bigcup_{\mathscr{T} \text{ tribu }, \mathscr{T} \supset \mathscr{A}} \mathscr{T}.$$

Comme l'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu, $\sigma(\mathscr{A})$ est bien une tribu.

Proposition 18 (importante) *Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$ et si $\mathscr{T}$ est une tribu, alors $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}$.*

Définition 19 *Lorsque (X,d) est un espace métrique (par exemple $\mathbf{R}^n$), on appelle* **tribu borélienne** *la tribu engendrée par l'ensemble $\mathscr{O}$ de tous les ouverts de X. On la note $\mathscr{B}_X = \sigma(\mathscr{O})$. Les éléments de $\mathscr{B}_X$ sont appelés* **boréliens**.

Proposition 20 *La tribu borélienne $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ est engendrée par l'un ou l'autre des ensembles suivants :*

1. *L'ensemble des intervalles ouverts $]a,b[$.*
2. *L'ensemble des intervalles ouverts $]a,b[$ avec a et b des nombres rationnels.*
3. *L'ensemble des intervalles ouverts $]-\infty,b[$ avec b rationnel.*

   On pourrait allonger la liste...

3 Fonctions mesurables

Définition 21 *Soient $(E_1,\mathscr{T}_1)$ et $(E_2,\mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E_1 \to E_2$ est dite* **mesurable** *(par rapport aux tribus $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$) si*

$$\forall B \in \mathscr{T}_2, f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_1.$$

Dans le cas particulier où $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont les tribus boréliennes de E_1 et E_2, on dit plutôt que f est **borélienne**.

Proposition 22 *Soient $(E_1,\mathscr{T}_1)$ et $(E_2,\mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables, et $f : E_1 \to E_2$. On suppose de plus que $\mathscr{T}_2 = \sigma(\mathscr{A})$. Pour vérifier que f est mesurable, il suffit de vérifier que*

$$\forall B \in \mathscr{A}, f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_1.$$

Proposition 23 *La composition de deux fonctions mesurables est mesurable (lorsque cela a un sens).*

Proposition 24 *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace mesurable et $f,g : E \to \mathbf{R}$ deux fonctions mesurables. Alors les fonctions $f+g$, $f-g$, fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ sont mesurables.*

On note $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty,+\infty]$ la **droite numérique achevée**.

Proposition 25 *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbf{R}}$. Alors les fonctions $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.*

Si de plus on suppose que la suite (f_n) converge (simplement) vers f, alors f est mesurable.

Définition 26 *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ est dite* **étagée** *(par rapport à $\mathscr{T}$) s'il existe une suite finie $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ de réels et une suite finie $(A_1,\dots,A_N)$ d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que*

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Théorème 27 (Approximation des fonctions mesurables par des fonction étagées) *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonctin mesurable. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions étagées de E dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers f.*

Si de plus $f \geqslant 0$, on peut imposer $f_n \geqslant 0$ et $f_n \leqslant f_{n+1}$.

4 Mesures

Définition 28 *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Une* **mesure** *μ sur $(E,\mathscr{T})$ est une application $\mu : \mathscr{T} \to [0,+\infty]$ qui vérifie*

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) Pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ tels que $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset$ si $n_1 \neq n_2$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n).$$

On dit que $(E, \mathscr{T}, \mu)$ est un ***espace mesuré****.*

Proposition 29 *Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Alors :*

1. *Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*
2. *Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{T}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n).$$

3. *Si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{T}$ ($A_n \subset A_{n+1}$), alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. *Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ ($A_n \supset A_{n+1}$) et si $\mu(A_0) < +\infty$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Définition 30 *Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *On dit que μ est* ***finie*** *si $\mu(E) < +\infty$.*
2. *On dit que μ est une* ***mesure de probabilité*** *si $\mu(E) = 1$.*
3. *On dit que μ est* ***σ-finie*** *s'il existe une suite croissante (E_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $\bigcup E_n = E$ et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout n.*
4. *Un point $x \in E$ est un* ***atome*** *de μ si $\{x\} \in \mathscr{T}$ et $\mu(\{x\}) < +\infty$.*
5. *On dit que μ est* ***diffuse*** *si elle n'a pas d'atome.*

Théorème 31 (Mesure de Lebesgue) *Il existe sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ une mesure (notée λ et appelée* ***mesure de Lebesgue****), qui vérifie la propriété suivante*

$$\forall a, b \in \mathbf{R} (a < b), \qquad \lambda(]a, b[) = b - a.$$

De plus, cette mesure est unique : si λ_1 et λ_2 sont deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ vérifiant la propriété précédente, alors $\lambda_1 = \lambda_2$.

Proposition 32 *Si $a, b \in \mathbf{R}$ et $a \leqslant b$, alors*

$$\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = b - a.$$

Si $A \in \mathbf{R}$ est un ensemble au plus dénombrable, alors $\lambda(A) = 0$.

5 Intégration

Définition 33 (Intégrale des fonctions étagées positives) *Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, en $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction étagée positive. On peut écrire f de la forme*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

avec $a_i \geqslant 0$, $A_i \in \mathscr{T}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. On définit alors ***l'intégrale de f par rapport à*** *μ par*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Définition 34 (Intégrale des fonctions mesurables positives) *Soit* $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un espace mesuré, en* $f : E \to \mathbf{R}$ *une fonction mesurable positive. On définit* $\int f d\mu$ *comme*

$$\int f d\mu = \sup_h \int h d\mu,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions h *étagées positives telles ques* $h \leqslant f$*. On vérifie que cette définition est cohérente avec la précédente.*

Définition 35 (Inégrale des fonction mesurables de signe quelconque) *Soit* $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un espace mesuré, et* $f : E \to \mathbf{R}$ *une fonction mesurable. On dit que* f *est* ***intégrable*** *(par rapport à* μ*) si* $\int |f| d\mu < +\infty$*. On pose* $f^+ = \max(f, 0)$ *et* $f^- = \max(-f, 0)$*. Lorsque* f *est intégrable, on définit son intégrale par*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Enfin, on note $\mathscr{L}^1(\mu)$ *l'ensemble des fonctions de* E *dans* $\mathbf{R}$ *intégrables par rapport à* μ*.*

Proposition 36 *L'ensemble* $\mathscr{L}^1(\mu)$ *est un espace vectoriel, et l'application* $f \to \int f d\mu$ *est une forme linéaire sur* $\mathscr{L}_1(\mu)$*. De plus si* $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$*, alors* $|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$*. Enfin, si* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *et* $f \leqslant g$*, alors* $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$*.*

Proposition 37 *Si* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *est une fonction Riemann-intégrable, alors* f *est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et les valeurs des deux intégrales coïncident.*

Théorème 38 (Théorème de convergence monotone) *Soit* $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un espace mesuré, et* (f_n) *une suite* ***croissante*** *de fonctions mesurables positives de* $(E, \mathscr{T})$ *dans* $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$*. On suppose que la suite* (f_n) *converge simplement. Alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

6 Le théorème de convergence dominée et ses conséquences

Lemme 39 (Lemme de Fatou) *Soit* $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un espace mesuré, et* (f_n) *une suite de fonctions mesurables positives de* $(E, \mathscr{T})$ *dans* $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$*. Alors*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Théorème 40 (Théorème de convergence dominée) *Soit* $(E, \mathscr{T}, \mu)$ *un espace mesuré, et* (f_n) *une suite de fonctions mesurables de* $(E, \mathscr{T})$ *dans* $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ *telle que* f_n *convergence simplement, et qu'il exsite une fonction* $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *vérifiant* $|f_n| \leqslant g$ *pour tout* n*. Alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$