

## Examen du 7 juin 2010 : corrigé succinct

### Exercice 2

On a  $D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} D_n$  où  $D_n$  est l'ensemble des réels  $x$  tels que  $\mu(\{x\}) \geq 1/n$ . Or  $D_n$  contient au plus  $n$  éléments distincts. En effet, s'il en contenait  $n+1$ , disons  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , on aurait

$$\mu(D_n) \geq \mu(\{x_1\}) + \dots + \mu(\{x_{n+1}\}) \geq \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} > 1,$$

contredisant  $\mu(\mathbf{R}) = 1$ .

Ainsi  $D$  s'écrit comme réunion dénombrable d'ensembles finis, donc  $D$  est au plus dénombrable.

### Exercice 3

On note  $f(x, t) = \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2}$ .

1. Par « croissances comparées », on a  $\ln(1+tx^2) = o(\sqrt{x})$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ( $t$  fixé). Ainsi  $f(x, t) = o(1/x^{3/2})$  et l'intégrale est convergente en  $+\infty$ . La fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbf{R}^+$ , et  $F(t)$  est donc bien définie.
2. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour  $t \in [0, T]$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue, la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est borélienne (car continue) et on a  $|f(x, t)| \leq f(x, T)$ . Comme  $x \mapsto f(x, T)$  est une fonction intégrable (cf question 1), l'utilisation du théorème est justifiée et  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}^+$ .
3. La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; lorsque  $t \in [\varepsilon, +\infty[$  on a la majoration

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\varepsilon x^2)}.$$

La fonction majorante est intégrable sur  $\mathbf{R}^+$ , le théorème de dérivation des intégrales à paramètre implique donc que  $F$  est dérivable sur  $[\varepsilon, +\infty[$ . Comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $F$  est en fait dérivable sur  $\mathbf{R}_*^+$ .

4. On calcule  $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)} = \frac{1}{t-1} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+tx^2} \right)$ , lorsque  $t \neq 1$ .
5. On a pour  $t > 0, t \neq 1$ ,

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{1}{t-1} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+tx^2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}.$$

Comme  $F'$  est continue sur  $\mathbf{R}_*^+$ , cette expression est aussi valable pour  $t = 1$ .

6. On intègre :  $F(t) = \pi \ln(1+\sqrt{t}) + cte$  lorsque  $t > 0$ . Par continuité, cela est aussi valable pour  $t = 0$ . Le cas  $t = 0$  permet de conclure que la constante est nulle.

### Exercice 4

Soit  $E = ]1, 4[ \times ]1, 3[$ , et  $\Phi(x, y) = (xy, x/y)$  et  $\Psi(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$ . On a  $\Phi(D) \subset E$ ,  $\Psi(E) \subset D$ ,  $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$  et  $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$ . Ainsi  $\Psi$  est une bijection de  $E$  sur  $D$ , et  $\Psi = \Phi^{-1}$ . De plus  $\Psi$  est de classe  $C^1$ . On calcule que le jacobien de  $\Psi$  vaut  $-\frac{1}{2v}$  et ne s'annule pas, c'est donc un  $C^1$ -difféomorphisme. Par le théorème de changement de variables,

$$I = \int_E (uv + u/v) \frac{1}{2v} du dv.$$

L'intégrale se calcule alors à l'aide du théorème de Tonelli, on obtient  $I = \frac{1}{2} \int_1^4 u du \cdot \int_1^3 (1 + 1/v^2) dv = 10$ .

## Exercice 5

1) On a bien  $\mu(\emptyset) = \int 0 d\nu = 0$ . Si  $(A_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \int f \mathbf{1}_{\bigcup A_n} d\nu = \int f \sum \mathbf{1}_{A_n} d\nu.$$

L'échange  $\int - \sum$  est justifié car les fonctions sont mesurables positives, donc

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum \int f \mathbf{1}_{A_n} d\nu = \sum \mu(A_n).$$

Ainsi  $\mu$  est une mesure. De plus, comme  $f \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_A$ , on a  $\mu(A) \leq \nu(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , donc  $\mu$  est finie et  $\mu \leq \nu$ .

2a) La fonction  $g$  est mesurable comme maximum de deux fonctions mesurables. Soit  $B = \{x \text{ t.q. } f_2(x) \geq f_1(x)\}$ . Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , on a

$$\int_A g d\nu = \int (g \mathbf{1}_{A \cap B} + g \mathbf{1}_{A \cap B^c}) d\nu = \int f_2 \mathbf{1}_{A \cap B} d\nu + \int f_1 \mathbf{1}_{A \cap B^c} d\nu \leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A)$$

2b) Remarquons que  $M \leq \nu(X) < +\infty$ ; de plus  $H$  est non vide car il contient la fonction nulle. Par définition de la borne supérieure, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  il existe  $f_n \in H$  tel que  $\int f_n d\nu \geq M - 1/n$ . On pose  $g_n = \max(f_1, \dots, f_n)$ . On a  $g_n \geq f_n$ , donc  $\liminf \int g_n d\nu \geq \lim \int f_n d\nu = M$ . De plus  $g_n \in H$  d'après la question précédente (par récurrence sur  $n$ , le max de  $n$  fonctions de  $H$  est encore dans  $H$ ). Ainsi  $\int g_n d\nu \leq M$ , d'où on tire  $\lim \int g_n d\nu = M$ . La suite  $g_n$  est croissante par construction.

La suite  $(g_n)$  converge car elle est croissante et majorée. Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , on a par le TCM

$$\int_A g d\nu = \lim \int_A g_n d\nu \leq \mu(A),$$

ce qui montre  $g \in H$ . De plus on a  $\int g d\nu = M$  par le TCM.

**Remarque :** on peut montrer (ce n'est pas facile) que l'on a l'égalité  $\mu(A) = \int_A g d\nu$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

3) La réponse est oui. Il faut raisonner comme dans la preuve du théorème d'unicité des mesures.

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des réunions finies d'intervalles de  $\mathbf{R}$ , qui est égal à l'ensemble des réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints. Alors  $\mathcal{C}$  est un clan.

On a  $\mu(I) \leq \nu(I)$  pour tout intervalle  $I$ : on le sait par hypothèse pour les intervalles ouverts, et on utilise le fait que tout intervalle est l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles ouverts  $I_n$ , et que comme les mesures sont finies on peut écrire  $\mu(\bigcap I_n) = \lim \mu(I_n) \leq \lim \nu(I_n) = \nu(\bigcap I_n)$ .

Comme la mesure d'une union finie disjointe est la somme des mesures, on conclut que  $\mu(A) \leq \nu(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{C}$ .

Soit maintenant  $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } \mu(A) \leq \nu(A)\}$ . Alors  $\mathcal{D}$  est une classe monotone (c'est une conséquence de la propriété de la mesure d'une union croissante / d'une intersection décroissante; on utilise à nouveau le fait que les mesures sont finies). De plus  $\mathcal{D}$  contient  $\mathcal{C}$ , donc aussi la classe monotone engendrée par  $\mathcal{C}$ . Par le théorème de la classe monotone, cette dernière coïncide avec la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$ , qui est la tribu borélienne. Ainsi  $\mu \leq \nu$ .