Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen du 28 juin 2010

Durée : 2 heures 30.

Exercice 1 (Question de cours — 3 points)

Donner l'énoncé complet du théorème de Tonelli.

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 3x & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que f est borélienne.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3 (4 points)

Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bijective telle que f et f^{-1} soient boréliennes. On dit qu'un borélien A est *presque invariant* si $\mu(A \triangle f(A)) = 0$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble de tous les boréliens presque invariants. Montrer que $\mathscr{P}$ est une tribu.

On rappelle que la différence symétrique de A et B est définie comme $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 4 (7 points)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)dt\right)^2$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$ (on remarquera que F est défini comme le carré d'une primitive).
2. Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ puis de $J = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)dt$.

Exercice 5 (6 points)

Calculer les limites suivantes (si elles existent)

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n(1 + 3x^2 + 8\sin(nx))dx$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)dx$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-(x-n)^2}dx$.

Pour la dernière question, on pourra faire un changement de variables et utiliser sans justification le fait que la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.