Université Claude Bernard   Mathématiques
L3 Calcul intégral

Examen du 7 juin 2010

Durée : 3 heures.

Exercice 1 (Question de cours — 3 points)

Calculer la valeur de l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$ à l'aide d'une intégrale double et d'un changement de variables (préciser soigneusement les théorèmes utilisés).

Exercice 2 (3 points)

Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ vérifiant $\mu(\mathbf{R}) = 1$. On note

$$D = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Montrer que D est au plus dénombrable.

Indication : $a > 0 \iff$ il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a \geqslant 1/n$.

Exercice 3 (7 points)

On pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2} dx$.

1. *(1,5 point)* Montrer que $F(t)$ est bien définie pour $t \geqslant 0$.
2. *(1,5 point)* Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
3. *(1 point)* Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$.
4. *(1 point)* Soit $t > 0, t \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}$ en éléments simples.
5. *(1 point)* En déduire la valeur de $F'(t)$ pour $t > 0$.
6. *(1 point)* Calculer $F(t)$ pour $t \geqslant 0$.

Exercice 4 (3 points)

Soit D l'ouvert du plan défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } x > 0, y > 0, 1 < xy < 4, 1 < y/x < 3\}.$$

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_D (x^2+y^2)dm_2(x,y)$ à l'aide du changement de variables (à justifier)

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x. \end{cases}$$

Exercice 5 (7 points) — *Les trois questions sont indépendantes.*

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Si μ et ν sont deux mesures finies[1] sur $(X, \mathcal{F})$, on écrit $\mu \leqslant \nu$ si l'inégalité $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ a lieu pour tout $A \in \mathcal{F}$.

1. (*1 point*) Soit ν une mesure finie sur $(X, \mathcal{F})$, et $f : X \to [0,1]$ une fonction $\mathcal{F}$-mesurable. On définit $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}^+$ par
$$\mu(A) = \int_A f d\nu = \int f \mathbf{1}_A d\nu \qquad \text{lorsque } A \in \mathcal{F}. \tag{1}$$
Montrer que μ est une mesure et que $\mu \leqslant \nu$.

2. Supposons maintenant que μ et ν sont deux mesures finies vérifiant $\mu \leqslant \nu$. On pose
$$H = \left\{ f : X \to [0,1],\ \mathcal{F}\text{-mesurable et telle que } \int_A f d\nu \leqslant \mu(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{F} \right\}.$$
   (a) (*1 points*) Soient f_1, f_2 deux fonctions de H. Montrer que la fonction $g = \max(f_1, f_2)$ est aussi dans H. *Indication :* on pourra écrire $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A \cap B} + \mathbf{1}_{A \cap B^c}$, où $B = \{x \text{ t.q. } f_2(x) \geqslant f_1(x)\}$.

   (b) (*2 points*) Définissons M par
$$M = \sup_{f \in H} \int f d\nu.$$
Utiliser la question précédente pour justifier l'existence d'une suite **croissante** (g_n) de fonctions de H telle que $\lim_{n \to \infty} \int g_n d\nu = M$. Soit $g = \lim g_n$ (pourquoi la limite existe-t-elle ?) ; montrer que $g \in H$ et que $\int g d\nu = M$.

3. (*3 points*) Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ vérifiant $\mu(]a,b[) \leqslant \nu(]a,b[)$ pour tous les réels a, b vérifiant $a < b$. Est-ce que cela implique $\mu \leqslant \nu$?

[1] Une mesure μ sur X est dite finie si $\mu(X) < +\infty$.