Feuille d'exercices numéro 1
Dénombrabilité ; intégrale de Riemann

Dénombrabilité

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
(2) L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
(3) L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est dénombrable.
(4) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ est dénombrable.
(5) $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ est dénombrable.

Exercice 2 Soit I un ensemble a.p.d., et pour tout $i \in I$, soit A_i un ensemble a.p.d. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est a.p.d. (de manière plus concise, on dit qu'une union a.p.d. d'ensembles a.p.d. est a.p.d.).

Exercice 3 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p_1, \dots, p_n$ n nombres premiers distincts. Donner une preuve du fait que $\mathbf{N}^n$ est dénombrable à l'aide de l'application $\phi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$

Exercice 4 Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbf{Z}$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit *transcendant.* Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 5 Est-ce que l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$ est dénombrable ?

Exercice 6 (*) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est a. p. d.

Exercice 7 (*) Montrer que tout ouvert O de $\mathbf{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (indication : on pourra considérer la relation sur O définie $x \sim y \iff [x, y] \subset O$, montrer que c'est une relation d'équivalence, que ses classes d'équivalence sont des intervalles ouverts et qu'il y en a un nombre au plus dénombrable).

Intégrale de Riemann

Exercice 8 Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble fini est Riemann-intégrable.

Exercice 9 (*) Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle compact. Montrer qu'une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ est Riemann-intégrable.

Exercice 10 (*) Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle compact. Montrer qu'une fonction monotone bornée de I dans $\mathbf{R}$ est Riemann-intégrable.

Exercice 11 (*) On considère la fonction $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann intégrale. En considérant la fonction $\mathbf{1}_{]0,1]}$, montrer que la composition de deux fonctions Riemann-intégrables n'est pas forcément Riemann-intégrable.

Exercice 12 (révisions sur les intégrales convergentes/divergentes)

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles convergent (et éventuellement pour quelles valeurs des paramètres α et β) ?

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} 1+\frac{1}{1+x^2}dx \qquad (2) \int_0^1 \sqrt{\frac{\sin x}{x^3}}dx \qquad (3) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{2x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx \qquad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}dx$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx \qquad (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2e^{-t}}dt \qquad (7) \int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}dt \qquad (8) \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$$

Première approche du théorème de convergence dominée

Exercice 13 Pour chacune des suites de fonctions données, montrer que $J_n = \int_I f_n(x)dx$ converge et calculer la limite de la suite (J_n).

a) $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}$ où $1 < \alpha < 2$.

b) $I = [A, +\infty[$ où $A > 0$ et $f_n(x) = \dfrac{n^2x\exp(-n^2x^2)}{1+x^2}$.

c) $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[}(x)$.

Exercice 14 Soit $f : R^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-n\sin^2 x)f(x)dx.$$

Exercice 15 (**Partiel avril 2009**) On considère la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin(x^n)}{x^n}\frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|\sin(t)| \leqslant |t|$.
2. Montrer que pour tout n, l'intégrale $\int_0^\infty f_n(x)dx$ converge et calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx.$$

Exercice 16 (**Examen juin 2007**) On considére pour $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\int_0^\infty f_n(x)dx$ converge.

(2) (*) Démontrer que pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $f_n(x) \leqslant \frac{4}{x^2}$.

(3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 17 (**Examen janvier 2009**) On considère pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, les fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}.$$

1. Montrer que pour chaque $n \geqslant 2$, l'intégrale $I_n := \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.

2. Montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.