Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 2
La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

On dit qu'une propriété $P(x)$ qui dépend d'un réel x est vraie presque partout (p.p.) si

$$m(\{x \text{ t.q. } P(x) \text{ est fausse}\}) = 0.$$

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) Si $A \subset \mathbf{R}$ vérifie $m^*(A) = 0$, alors A est mesurable.
(2) Soit $A \subset \mathbf{R}$ mesurable. Si A est bornée, alors $m(A) < +\infty$.
(3) Soit $A \subset \mathbf{R}$ mesurable. Si $m(A) < +\infty$, alors A est bornée.
(4) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
(5) Si A est une partie mesurable de $[0,1]$, alors $m(A) + m([0,1] \setminus A) = 1$.
(6) Si A et B sont des parties mesurables de $[0,1]$ telles que $m(A)+m(B) = m(A\cup B)$, alors $A\cap B = \emptyset$.
(7) Si A et B sont des parties mesurables de $\mathbf{R}$ telles que $m(A)+m(B) = m(A\cup B)$, alors $m(A\cap B) = 0$.

Exercice 2 Soit $A \subset [0,1]$. On a défini en cours

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum \ell(I_k)\ ;\ (I_k) \text{ famille dénombrable d'intervalles de } \mathbf{R} \text{ telle que } A \subset \bigcup I_k\right\}.$$

Une légère variante aurait pu être

$$\hat{m}^*(A) = \inf\left\{\sum \ell(I_k)\ ;\ (I_k) \text{ famille dénombrable d'intervalles ouverts de } \mathbf{R} \text{ telle que } A \subset \bigcup I_k\right\}.$$

Montrer que $m^*(A) = \hat{m}^*(A)$.

Exercice 3 Soit A et B des parties de $[0,1]$ vérifiant $A \subset B$. Montrer que $m^*(A) \leqslant m^*(B)$ et que $m_*(A) \leqslant m_*(B)$.

Exercice 4 Soit (S_n) une suite croissante de parties mesurables de $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire $S_n \subset S_{n+1}$ pour tout n). Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} m(S_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right).$$

Exercice 5 Soit (S_n) une suite décroissante de parties mesurables de $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire $S_n \supset S_{n+1}$ pour tout n) vérifiant $m(S_0) < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} m(S_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right).$$

Donner un contre-exemple montrant que le résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas $m(S_0) < +\infty$.

Exercice 6 Ensemble de Cantor

Soit $K_0 = [0,1]$. On découpe K_0 en trois intervalles de longueur $1/3$ et on forme K_1 en enlevant à K_0 l'intervalle ouvert central. Ainsi K_1 est l'union de deux intervalles fermés de longueur $1/3$.

Ensuite, dans chacun de ces deux intervalles, on enlève l'intervalle central de longueur $1/3^2$, et on appelle K_2 l'ensemble obtenu (c'est la réunion de 4 intervalles fermés de longueur $1/9$). On continue le processus : on enlève à chaque intervalle de K_n l'intervalle ouvert central de longueur $1/3^{n+1}$ et on note K_{n+1} l'ensemble ainsi obtenu.

Enfin, on pose $K = \bigcap_n K_n$, que l'on appelle ensemble de Cantor. Montrer que $m(K) = 0$.

Donner une condition sur le développement en base 3 d'un nombre $x \in [0,1]$ pour que $x \in K$. Montrer enfin que K n'est pas dénombrable. L'ensemble K est de plus compact (on l'a construit comme une intersection de compacts).

Exercice 7 Un autre ensemble de Cantor

Attention : la version distribuée en TD était incorrecte.

On construit un ensemble similaire à celui de l'exercice précédent, mais en enlevant un intervalle central de longueur $1/5^n$ (au lieu de $1/3^n$) chaque étape. Ainsi $K_0 = [0, 1]$,

$$K_1 = K_0 \setminus \left]\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right[,$$

$$K_2 = K_1 \setminus \left(\left]\frac{9}{50}, \frac{11}{50}\right[\cup \left]\frac{39}{50}, \frac{41}{50}\right[\right) \quad \text{et cætera.}$$

On note $K = \bigcap K_n$ comme précédemment. Montrer que $m(K) > 0$, mais que K est d'intérieur vide.

Exercice 8

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que $m(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que
$$f = g \text{ presque partout} \iff f = g.$$
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les deux propritétés suivantes :
(P1) : f est continue presque partout
(P2) : Il existe une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $f = g$ presque partout
Donner l'exemple d'une fonction f_1 qui vérifie (P1) mais qui ne vérifie pas (P2), et d'une fonction f_2 qui vérifie (P2) mais qui ne vérifie pas (P1).
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}$ tel que $m(U) \leqslant \varepsilon$.
5. Soit $A \subset \mathbf{R}$ mesurable. On définit l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ par $f(x) = m(A \cap [-x, x])$. Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que f est continue, puis que pour tout $t \in [0, m(A)]$, il existe une partie mesurable $B \subset A$ telle que $m(B) = t$.