Feuille d'exercices numéro 3

Intégration sur les esapces mesurés (1) : tribus, fonctions mesurables et boréliennes.

On dit qu'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est *borélienne* si elle est $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$-mesurable.
Dans toute cette feuille, $(X, \mathcal{F})$ désigne un espace mesurable.

Exercice 1 **Un rappel de cours**. Pourquoi est-ce que toute fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est borélienne ?

Exercice 2 **Intersection de tribus**. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur un ensemble X. Est-il toujours vrai que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu, ou bien est-ce vrai seulement sous l'hypothèse que I est au plus dénombrable ?

Exercice 3 **Des familles qui engendrent la tribu borélienne de R**. On rappelle que la tribu borélienne est (par définition) la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbf{R}$. Montrer que c'est également la tribu engendrée par les familles suivantes :

1. $\mathscr{A}_1 = \{]a, b[, a, b \in \mathbf{R}\ (a < b)\}$.
2. $\mathscr{A}_2 = \{[a, b], a, b \in \mathbf{R}\ (a < b)\}$.
3. $\mathscr{A}_3 = \{]a, b[, a, b \in \mathbf{Q}\ (a < b)\}$.
4. $\mathscr{A}_4 = \{[a, +\infty[, a \in \mathbf{R}\}$.
5. $\mathscr{A}_5 = \{]-\infty, c], c \in \mathbf{Q}\}$.

Exercice 4 **Translation d'un borélien**. Fixons $a \in \mathbf{R}$. Si $B \subset \mathbf{R}$, on note $B + a = \{b + a, b \in B\}$. Montrer que pour tout borélien B, l'ensemble $B + a$ est aussi borélien.

Exercice 5 **Boréliens de $\overline{\mathbf{R}}$**. On note $\mathscr{B}_{\overline{\mathbf{R}}}$ la tribu des boréliens de $\overline{\mathbf{R}}$. Soit $A \subset \overline{\mathbf{R}}$. Montrer que

$$A \in \mathscr{B}_{\overline{\mathbf{R}}} \iff A \cap \mathbf{R} \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}.$$

Exercice 6 (**Examen juin 2007 2ème session**).
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est borélienne.

Exercice 7 Soit $f : X \to \mathbf{R}$ $\mathcal{F}$-mesurable et $g : X \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $f(x) \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est $\mathcal{F}$-mesurable.

Exercice 8 Soit $f : X \to \mathbf{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| < M \\ M \text{ si } f(x) \geqslant M \\ -M \text{ si } f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :
(A) f est $\mathcal{F}$-mesurable.
(B) $\forall M > 0, f_M$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Exercice 9 Décrire les fonctions $\mathcal{F}$-mesurables de X dans $\mathbf{R}$ dans les cas suivants :
(1) $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.
(2) $\mathcal{F} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée f' est borélienne.

Exercice 11 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 12 Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Soit $A = \{x \in X$ t.q. la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge$\}$ et $B = \{x \in X$ t.q. la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée$\}$. Montrer que A et B sont dans $\mathcal{F}$.
(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit $g : X \to \mathbf{R}$ par $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N}$ t.q. $f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est $\mathcal{F}$-mesurable.

Exercice 13
(a) Montrer que si $f : X \to (\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $|f|$ est aussi mesurable. La réciproque est-elle vraie ?
(b) Soit $X = \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_s$ la tribu dans X engendrée par les singletons. Montrer que $f : X \to (\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable si et seulement si il existe un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante.

Exercice 14 On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}$. On note $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbf{N}$.
(1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}_n = \{[\![0, n]\!], \{n + 1\}, \{n + 2\}, \cdots\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathscr{A}_n)$. Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)$ est une suite décroissante. On note ensuite $\mathcal{F} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{F}_n$. Montrer que $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbf{N}\}$.
(2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}'_n = \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n - 1\}, [\![n, +\infty[\}$ et $\mathcal{F}'_n = \sigma(\mathscr{A}'_n)$. Montrer que la suite $(\mathcal{F}'_n)$ est croissante. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{F}'_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 15 (*) On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $n\mathbf{N}^*$ l'ensemble des multiples non nuls de n. Soit les classes $\mathscr{A} = \{n\mathbf{N}^*, n \geqslant 1\}$ et $\mathscr{A}' = \{p\mathbf{N}^*, p \geqslant 1, p$ premier$\}$. Montrer que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(X)$, mais que $\sigma(\mathscr{A}') \neq \mathscr{P}(X)$.

Exercice 16 Les classes suivantes sont-elles des tribus ?
(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est finie $\}$.
(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est finie ou A^c est finie $\}$.
(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est au plus dénombrable ou A^c est au plus dénombrable $\}$.

Exercice 17 Combien y a-t-il de tribus différentes sur un ensemble à 3 éléments ? Sur un ensemble à 4 éléments ?

Exercice 18 (**Examen juin 2008 session 2**) Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Soit B la partie définie par

$$B = \{x \in X \text{ pour lesquels il existe un unique } n \in \mathbf{N} \text{ tel que } x \in A_n\}.$$

Montrer que $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 19 Soient $\mu_1, \ldots, \mu_N$ des mesures sur $(X, \mathcal{F})$, et $a_1, \ldots, a_N$ des nombres réels positifs. Montrer que $a_1\mu_1 + \cdots + a_N\mu_N$ est une mesure.

Exercice 20 Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{F})$ et $A \in \mathcal{F}$. Montrer que l'application λ, définie pour $B \in \mathcal{F}$ par $\lambda(B) = \mu(B \cap A)$, est une mesure.