Feuille d'exercices numéro 4

Intégration sur les esapces mesurés (2) : intégration des fonctions positives et théorème de convergence monotone.

Dans toute cette feuille, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

(1) Si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathcal{F}$, alors $\int f d\mu = \mu(A)$.

(2) Si $f : X \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$, alors f est intégrable.

(3) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 2 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ dans les cas suivants :

(a) $X = \mathbf{N}$, $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\mathbf{N})$ et $\mu(A)$ est le cardinal de A (mesure de comptage).

(b) Fixons $x \in X$, $\mathcal{F} = \mathscr{P}(X)$ et posons $\mu(A) = \mathbf{1}_A(x)$ (mesure de Dirac).

Exercice 3 Sommes doubles. Soit $(a_{n,k})_{n\in\mathbf{N},k\in\mathbf{N}}$ une famille de nombres positifs. Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k\in\mathbf{N}} a_{n,k} = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{n\in\mathbf{N}} a_{n,k}.$$

Indication : utiliser le théorème de convergence monotone !

Exercice 4 Fonctions positives d'intrégrale nulle. Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.

Exercice 5 (**Partiel automne 2006**) Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

1) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f. On suppose que f_0 est intégrable (c'est-à-dire que $\int f_0 d\mu < \infty$). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $I_n < \infty$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

4) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 6 Mesure à densité. Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable positive. On pose, pour $A \in \mathcal{F}$,

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu = \int \mathbf{1}_A f d\mu.$$

Montrer que λ est une mesure (que l'on appelle mesure de densité f par rapport à μ).

Indication : utiliser le théorème de convergence monotone.

Remarque : le résultat est plus fort que le lemme 3.3 du cours qui couvre le cas où f est étagée.

Exercice 7 Ensembles de niveau. Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable positive. Pour $t > 0$, on pose $S_f(t) = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > t\}$, et $\Psi_f(t) = \mu(S_f(t))$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t) dt.$$

Indication : commencer par le cas où f est étagée, puis raisonner par approximation.

Exercice 8 Complétion d'une mesure. Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{F})$. On dit qu'une partie $S \subset X$ est μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $S \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On dit que μ est *complète* si toute partie μ-négligeable est dans $\mathcal{F}$.

1. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}, \mathscr{L}_{\mathbf{R}})$ est-elle complète ?
2. Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{F})$ qui n'est pas complète. On pose

$$\bar{\mathcal{F}} = \{E \cup S; E \in \mathcal{F}, S \text{ négligeable}\}.$$

Montrer que $\bar{\mathcal{F}}$ est une tribu, qu'il existe une unique mesure $\bar{\mu}$ sur $(X, \bar{\mathcal{F}})$ qui coïncide avec μ sur $\mathcal{F}$, et que $\bar{\mu}$ est complète.

Exercice 9 Fonctions mesurables et série harmonique. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une suite (A_j) d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mathbf{1}_{A_j}.$$

On retrouve ainsi le fait (vu en cours) que toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Indication : on peut poser $A_1 = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$, puis par récurrence $A_k = \left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \mathbf{1}_{A_j}(x)\right\}$.

Exercice 10 (**Partiel avril 2007**)

(a) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer (vu en cours cette année) que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans $\mathbf{R}$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x) \right) dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 11 (**Partiel avril 2007**)

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 12 (**Examen juin 2007**)

Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

(1) On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

(2) On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.