Feuille d'exercices numéro 5

Intégration sur les esapces mesurés (3) : intégrale des fonctions de signe quelconque et théorème de convergence dominée.

Dans toute cette feuille, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Exercice 1 (**Examen juin 2008 session 2**). Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$.

Indication : Comment majorer $\sin u$ lorsque u est proche de 0 ?

Exercice 2 Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable.

1) Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n = \{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geqslant n\}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f d\mu$.

2) On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_A f^{1/n} d\mu$.

Exercice 3 Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré ; on suppose que la mesure μ est finie, i.e. $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction $\mathcal{F}-$ mesurable et, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 4 Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}^+$ une fonction telle que, pour tout $n \geqslant 1$, f^n est $\mu-$ intégrable. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$, $B = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > 1\}$ et $J_n = \int_X f^n d\mu$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (b) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
   (c) $\mu(B) = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (d) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} J_n$ est convergente.
   (e) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (f) $\mu(A) = 0$.

Exercice 5 Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions $\mu-$ intégrables convergente vers 0 μ-pp. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu.$$

On pourra utiliser les résultats du cours de L2 sur les séries alternées.

Exercice 6 On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Soit (A_n) une suite de parties boréliennes de $[0, 1]$, avec pour tout n, $m(A_n) = \frac{1}{2}$. On note A l'ensemble des $x \in [0, 1]$ qui appartiennent à une infinité des A_n :

$$A = \{x \in [0, 1] \text{ t.q. } \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant N \text{ t.q. } x \in A_n\}.$$

1. Montrer que A est borélien.
2. Montrer que $m(A) \geqslant \frac{1}{2}$ (*on pourra écrire* $\mathbf{1}_A$ *en fonction de* $\mathbf{1}_{A_n}$ *et utiliser le lemme de Fatou*).
3. Donner un exemple avec $m(A) = \frac{1}{2}$, et un autre exemple avec $m(A) = 1$.

Exercice 7 (Théorème d'Egoroff, **Partiel avril 2007**)

Soit $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X)<+\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Le but de l'exercice est de montrer que pout tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in\mathcal{F}$ tel que $\mu(A)<\varepsilon$ et (f_n) converge vers f uniformémént sur $X\setminus A$.

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k\in\mathbf{N}^*$ et $n\in\mathbf{N}$,
$$E_n^k=\bigcap_{p\geqslant n}\{x\in X \text{ t.q. } |f_p(x)-f(x)|\leqslant 1/k\}.$$
Montrer que $E_n^k\in\mathscr{T}\cdot$ Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?
3. Montrer que $\forall k\in\mathbf{N}^*, X=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}E_n^k$. En déduire que
$$\forall\varepsilon>0,\forall k\in\mathbf{N}^*,\exists n_k\in\mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X\setminus E_{n_k}^k)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^k}.$$
4. Conclure.

Exercice 8 Soit $f\in\mathscr{L}^1(X,\mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour toute partie $S\in\mathcal{F}$,
$$\mu(S)<\delta\Rightarrow\int_S|f|d\mu<\varepsilon.$$

Exercice 9 Déduire des deux exercices précédents une preuve alternative du théorème de convergence dominée, selon les lignes suivantes. Si $|f_n|\leqslant g\in\mathscr{L}^1(X,\mu)$, $f_n\to f$, $\varepsilon>0$, soit $Y\in\mathcal{F}$ tel que
$$\mu(Y)<+\infty,\int_{X\setminus Y}gd\mu<\varepsilon,$$
et $S\in\mathcal{F}$ tel que $S\subset Y$, $\int_S gd\mu<\varepsilon$ et $f_n\to f$ uniformément sur $Y\setminus S$.

Exercice 10 **Convergence en mesure.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$. On dit que la suite (f_n) *converge en mesure* vers f si pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}\mu(E_{n,\varepsilon})=0$, où
$$E_{n,\varepsilon}=\{x\in X \text{ t.q. } |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}.$$

1. Montrer que si (f_n) converge vers f en mesure, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge vers f μ-presque partout.
2. Montrer que si $\mu(X)<+\infty$ et (f_n) converge vers f μ-presque partout, alors (f_n) converge vers f en mesure.
3. Donner un contre-exemple montrant que l'on ne peut pas enlever l'hypothèse $\mu(X)<+\infty$ dans la question précédente.

Exercice 11 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers f, que f est positive, $\int fd\mu<+\infty$ et que
$$\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu=\int fd\mu.$$
Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}|f_n-f|d\mu=0.$$
Indication : écrire $|f_n-f|=2(f-f_n)^+-(f-f_n)$ et appliquer le TCD.

Exercice 12 Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x)=e^{-nx}-2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x>0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer les quantités
$$\int_{\mathbf{R}^+}f(x)dx \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^+}f_n(x)dx.$$