Feuille d'exercices numéro 6
Fonctions définies par des intégrales.

Exercice 1 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)dt\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}dt$.
(1a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.
(1b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(2) En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ puis de $J = \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)dt$.

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixt}e^{-t^2/2}dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$.
(3a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
(3b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2 de l'exercice 1.

Exercice 3 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
(3) Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.
(4) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2 de l'exercice 1.

Exercice 4 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t,x) = \frac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.
(1) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \to f(t,x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^+$.
Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty f(t,x)dx$.
(2a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
(2b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
(2c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 5 (examen juin 2008, 2ème session)
Pour $y > 0$, soit $F(y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x^2y)}{1+x^2}dx$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y \to +\infty} F(y)$.
(2a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
(2b) Montrer que F vérifie sur $\mathbf{R}_+^*$ une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)dx$.
(2c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geqslant 0$.
(2d) Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 6 (examen juin 2007, 2ème session). On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}dx$.

1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3) Montrer que I est continue en 0.
4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.
(1) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbf{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
(2) Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

(3a) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
(3b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
(3c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbf{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
(4) Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

Exercice 8 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 9 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.
(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $t \to \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On pose alors pour $x \geqslant 0, F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \cos(xt)d\mu(t)$.
(2) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
(3) On suppose que l'application $t \to t^2$ est μ-intégrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2}$. On pourra remarquer et justifier l'inégalité $1 - \cos(u) \leqslant u^2/2$.
(4) On ne suppose plus que $t \to t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} = 0$.
(4a) Soit G définie sur $\mathbf{R}^+$ par $G(x) = \dfrac{1-F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbf{R}^+$.
(4b) En déduire que $t \to t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.
(4c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 10 (**Examen juin 2009**). Soit $\phi : [0,1] \to]0, +\infty[$ une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue). On définit une fonction $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ par

$$F(t) = \int_0^1 \sqrt{\phi(x)^2 + t}\ dx$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$ (*on pourra par exemple utiliser, en la démontrant, l'inégalité* $\sqrt{\alpha+\beta} \leqslant \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ *pour* $\alpha, \beta \geqslant 0$).
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$.
3. On suppose dans cette question que la fonction $1/\phi$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$). Montrer alors que F est dérivable en 0.
4. Réciproquement, on suppose que F est dérivable en 0, et que F' est continue en 0. Montrer que la fonction $1/\phi$ est intégrable.