Feuille d'exercices numéro 7
Mesures-produits.

Exercice 1 (**Unions finies de rectangles**). Soit $(X, \mathscr{M})$ et $(Y, \mathscr{N})$ deux espaces mesurables. On note $\mathscr{M} \boxtimes \mathscr{N}$ l'ensemble des réunions **finies** de rectangles mesurables **disjoints** (on rappelle qu'un rectangle mesurable est un ensemble de la forme $A \times B$, où $A \in \mathscr{M}$ et $B \in \mathscr{N}$).

1. Montrer que si R et R' sont deux rectangles mesurables, alors $R^c, R \cap R'$, $R \setminus R'$ et $R \cup R'$ sont dans $\mathscr{M} \boxtimes \mathscr{N}$.
2. Montrer par récurrence sur n que l'union de n rectangles mesurables est dans $\mathscr{M} \boxtimes \mathscr{N}$. Ainsi $\mathscr{M} \boxtimes \mathscr{N}$ est aussi l'ensemble des réunions finies de rectangles mesurables.
3. Montrer que $\mathscr{M} \boxtimes \mathscr{N}$ est un clan (i.e. il est stable par union finie, intersection finie et passage au complémentaire).

Exercice 2 (**Extension au cas σ-fini**). La proposition suivante a été démontrée en cours en remplaçant l'hypothèse « μ et ν sont σ-finies » par « μ et ν sont finies ». Montrer comment déduire le cas σ-fini du cas fini.

Proposition. *Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν des mesures σ-finies. Alors, pour tout $E \in \mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$, on a*

1. *La fonction $x \mapsto \nu(E_x)$ est $\mathscr{M}$-mesurable.*
2. *La fonction $y \mapsto \mu(E^y)$ est $\mathscr{N}$-mesurable.*
3. *On a l'égalité $\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$.*

Exercice 3 (**Boréliens de $\mathbf{R}^2$ — Partiel avril 2009**). On note $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ la tribu borélienne de $\mathbf{R}$, et $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$ la tribu borélienne de $\mathbf{R}^2$. On rappelle les résultats suivants

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}) = \sigma\left(\{]a, b[\ ; \quad a, b \in \mathbf{R}\}\right).$$

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) = \sigma\left(\{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\ ; \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}\}\right).$$

On note aussi $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$ l'ensemble des rectangles mesurables, c'est-à-dire

$$\mathscr{C} = \{A \times B\ ; \quad A, B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})\}.$$

Enfin, on rappelle que la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ est définie par

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\mathscr{C}).$$

1. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) \subset \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$.
2. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathbf{R})$ défini par

   $$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \text{ t.q. } A \times \mathbf{R} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)\}.$$

   Montrer que $\mathscr{A}$ est une tribu.
3. En déduire que pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, on a $A \times \mathbf{R} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$.
4. Expliquer comment vous démontreriez de manière analogue que pour tout $A' \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, on a $\mathbf{R} \times A' \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$ (on ne demande pas de faire la démonstration en détail, seulement d'expliquer en quelques lignes comment vous feriez).
5. Démontrer que $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$.

Exercice 4 On désigne par m (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x,x); x \in [0,1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbf{R}^2$? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) dm(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) dm(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 5 Dans cet exercice, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f\colon E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbf{R}^+ \colon f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$.
2. En utilisant le théorème de Tonelli, prouver que

$$\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E\colon f(x) \geq t\}) dt$$

   (cette égalité peut se démontrer directement — cf exercice 7 de la feuille 4).
3. Soit maintenant $\varphi\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant le fait que $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$, montrer que

$$\int_E \varphi \circ f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \mu(\{x \in E\colon f(x) \geq t\}) dt$$

Exercice 6

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est bien définie et que $I = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

   En déduire que $I = \pi^2/4$.
3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Exercice 7

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx < +\infty$.
2. Calculer sa valeur à l'aide de l'intégrale double

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x} \sin(2xy) dy dx.$$

Exercice 8 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. En intégrant $f(x,y) = x^y$ sur un domaine convenable, calculer

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx .$$