Feuille d'exercices numéro 8
Changements de variables — Exercices de révision

Exercice 1 (**Examen juin 2008**).

Pour a, b, c réels, on pose $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ et $\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1}e^{-t}dt$

1a. A quelles conditions sur a, b a-t-on $B(a,b) < +\infty$? A quelle condition sur c a-t-on $\Gamma(c) < +\infty$?.

1b. Soit $H : (u,v) \to (s,t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,1[$ sur un ouvert V à préciser.

1c. Soit $a > 0, b > 0$ et

$$I = \int_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*} s^{a-1}t^{b-1}e^{-(s+t)}dm_2(s,t).$$

En calculant I de deux manières différentes (l'une d'elles utilisant le changement de variables H), montrer que pour tous $a, b > 0$,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{1}$$

2a. En choisissant $a = b = 1/2$ dans la formule (1), calculer $\Gamma(1/2)$. Indication : on pourra remarquer que $1-(1-2x)^2 = 4x(1-x)$.

2b. Déduire de la question précédente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Exercice 2 (**Examen janvier 2009**)

Pour $n \geqslant 1$, soit $D_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1\}$.

1. Justifier que D_n est un borélien de $\mathbf{R}^n$.

2. Soit $I_n = \int_{D_n} x_1 \cdots x_n dx_1 \cdots dx_n$.

(a) Etablir une relation entre I_n et I_{n-1}.

(b) En déduire la valeur de I_n.

Exercice 3

1. Soit $H : (u,v) \to (s,t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,1[$ sur l'ouvert $V = (\mathbf{R}_+^*)^2$.
2. Soit $x > 0, y > 0$ et

$$I = \int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}dsdt.$$

En utilisant le changement de variables H, calculer I et retrouver la formule établie à l'exercice 1.

Exercice 4 (**examen janvier 2007, 2ème session**)

Soit m_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. Soit $0 \leqslant a < b$. On pose

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(a) Montrer que D est un borélien.

(b) A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dm_2(x,y)$ en fonction de a et b.

Exercice 5 (**examen juin 2008, 2ème session**)

On note $S = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$.

1. Montrer que S est borélien.
2. Calculer $m_n(S)$.

   Indication : Comment écrire S en fonction de $B(r) = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r\}$?

Exercice 6 (**examen juin 2007**)

Soit U la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$U = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } u > 0, v > 0, w > 0 \text{ et } uv < 1, uw < 1, vw < 1\}$$

(1) Montrer que U est borélien.

(2) On note m_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^3$. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_U uvw \, dm_3(u, v, w).$$

On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application borélienne. On fixe $a, b, c > 0$ et on note

$$I_{a,b,c} = \int_{(\mathbf{R}^+)^3} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x + y + z) dxdydz.$$

1. Soit $H : (x, y, z) \to (u, v, w)$ avec $u = x + y + z$, $v = \frac{x}{x+y}$ et $w = \frac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbf{R}_+^*)^3$ sur un ouvert V de $\mathbf{R}^3$ à expliciter.
2. En utilisant H et la formule établie à l'exercice 1, en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a + b + c)} \int_0^\infty f(u) u^{a+b+c-1} du$$

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit l'intégrale

$$J = \int_{(\mathbf{R}^+)^3} \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

   A quelle condition sur α, β, γ l'intégrale J est-elle finie ?
4. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. En utilisant la question 2, calculer

$$L = \int_B |x|^{a-1} |y|^{b-1} |z|^{c-1} dxdydz.$$

   Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice 8 (**examen janvier 2007, 1ère session**)

Partie 1

Pour $a > 0$ et $x \geqslant 0$, on pose $H_a(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(at^2+\frac{x}{t^2})}dt$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(a) Montrer que la fonction $H_a : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est continue.

(b) Calculer $H_a(0)$.

(c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(d) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{\alpha}{s}$ avec α convenablement choisi).

(e) En déduire que $H_a(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ax}}$, $a > 0$, $x \geqslant 0$.

Partie 2

On note m_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \alpha > 0.$$

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) = \int_{(\mathbf{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2+\frac{x}{y^2})}x^{\alpha-\frac{1}{2}}dm_2(x, y).$$

(a) En utilisant la partie 1, montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.

(b) En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x/y^2 \end{cases}$ (que l'on justifiera), montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

(c) En déduire la formule $\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice 9 (**Examen juin 2009**)

Pour tous nombres réels x et t, on note $f(t, x) = \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebsegue sur $\mathbf{R}^+$.

   Pour tout $t \geqslant 0$, on note $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty f(t, x)dx$.
2. Montrer que $F(0) = \pi/2$, que la fonction F est décroissante et calculer sa limite en $+\infty$.
3. Étudier la continuité et la différentiabilité de F sur $\mathbf{R}^+$ (*on pourra se restreindre à* $\mathbf{R}_*^+$ *si besoin*).
4. Pour tout réel a, on pose $J(a) = \displaystyle\int_0^\infty t^a F(t)dt$. Déterminer pour quelles valeurs de a on a $J(a) < +\infty$ (*on pourra effectuer un changement de variable pour écrire* $J(a)$ *comme le produit de deux intégrales*).

Exercice 10 (**examen juin 2007, 2ème session**)

On rappelle qu'on note m_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$, et que la fonction "cosinus hyperbolique" est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$.

1) On se donne les trois intégrales

$$A = \int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{dm_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad B = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{dm_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad C = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{dm_2(u,v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}$$

(a) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

(b) En faisant le changement de variables $s = u - v, t = u + v$, prouver que $B = C$ et donner la valeur de A.

2) On considère la fonction $H : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-x \operatorname{ch} t) dt.$$

(a) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. Déterminer les limites de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

(c) En utilisant l'intégrale A de la partie 1, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$.