

Examen partiel virtuel

Durée : 2 heures.

Exercice 1 (Question de cours — 4 points)

Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré. Rappeler la définition de l'intégrale d'une fonction étagée, puis de l'intégrale d'une fonction mesurable positive.

Exercice 2 (3 points)

Soit $X = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments.

1. Déterminer la tribu \mathcal{F} engendrée par $\{A, B, C\}$, où $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ et $C = \{c, d\}$ (n'écrivez pas plus de quelques lignes pour justifier votre réponse).
2. Donner un exemple de fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ qui n'est pas \mathcal{F} -mesurable.

Exercice 3 (5 points)

Soit $(I_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Calculer la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer à l'aide d'un changement de variables que $n(1 - I_n) = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} du$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n)$.

Exercice 4 (4 points)

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^3}{1+n^3 2^k}$$

Exercice 5 (4 points)

Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$.

Indication : Comment majorer $\sin u$ lorsque u est proche de 0 ?

Exercice 6 (3 points - exercice plus difficile hors barème)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note

$$A = \{y \in \mathbf{R} \text{ t.q. l'équation } f(x) = y \text{ admet une unique solution dans } \mathbf{R}\}.$$

Montrer que A est borélien.

Indication : Montrer que l'équation $f(x) = y$ a au moins deux solutions si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ et $k, \ell \in \mathbf{Z}$ avec $k \neq \ell$ tels que $y \in f([k/n, (k+1)/n]) \cap f([\ell/n, (\ell+1)/n])$.

Ceci est un sujet d'examen partiel virtuel. Choisissez une plage horaire de 2 heures et répondez-y dans les conditions d'un examen normal (seul, sans documents). Vous me rendrez votre copie (sans votre nom) le lundi 19 avril. Je le corrigerai mais la note ne comptera pas (de toute façon la copie restera anonyme) ; cela permettra de situer votre niveau.