ENS LYON | Informatique

L3 Probabilités

Devoir maison numéro 1

A rendre pour le mercredi 28 février.

Exercice 1 Permutations aléatoires

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

1. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier n et retourne une permutation aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Vous pouvez utiliser la fonction `RandInt` qui prend en entrée un entier m et retourne un entier aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \ldots, m\}$. Évidemment, on préfèrera un algorithme aussi rapide que possible.
2. On note $F(\sigma)$ le nombre de points fixes d'une permutation σ. Calculez

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[F(\sigma_n)],$$

où σ_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 2 Bits débiaisés

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, mais que vous ne connaissez pas la valeur de $p \in]0, 1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0, 1\}$.
2. On souhaite maintenant produire n bits indépendants de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de t telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de tn fois soit inférieure à $\frac{1}{100}$ pour n assez grand. Évidemment, plus t est petit, mieux c'est.

Exercice 3 Répétitions dans une suite de bits aléatoires

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Une répétition est un sous-mot de $X_1X_2 \cdots X_n$ du type $00 \cdots 0$ ou $11 \cdots 1$. Ainsi la suite 00011001 contient 4 répétitions de longueur 2.

1. Pour $p \geqslant 1$ fixé, quelle est l'espérance du nombre de répétitions de longueur p ? Montrez que pour $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$, cette espérance est de l'ordre de 1.
2. Montrez que pour $p \leqslant 0.99 \log_2 n$, la probabilité d'obtenir au moins une répétition de longueur p tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 Comment maximimser la probabilité de rencontrer l'âme sœur

Une princesse a $n \gg 1$ prétendants parmi lesquels elle doit choisir un époux. Ces prétendants sont numérotés de 1 à n dans l'ordre décroissant de préférence (celui qu'elle préfère porte le numéro 1). Les prétendants lui sont présentés dans un ordre aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ jusqu'à ce qu'elle choisisse celui qui lui semble le meilleur. Le problème est que la princesse ne peut comparer un prétendant qu'avec ceux qu'elle a déjà vus, et de plus elle ne peut choisir un prétendant qu'au moment où il lui est présenté : après c'est trop tard ! (Elle est obligée de choisir le dernier si le processus va jusque là). La princesse souhaite maximiser la probabilité d'épouser le prétendant numéro 1. Pour cela elle applique la stratégie suivante : elle refuse les m premiers prétendants, puis accepte dès qu'on lui présente un prétendant qu'elle préfère aux m premiers. Estimez la valeur optimale de m, puis la probabilité que la princesse épouse le prétendant numéro 1.